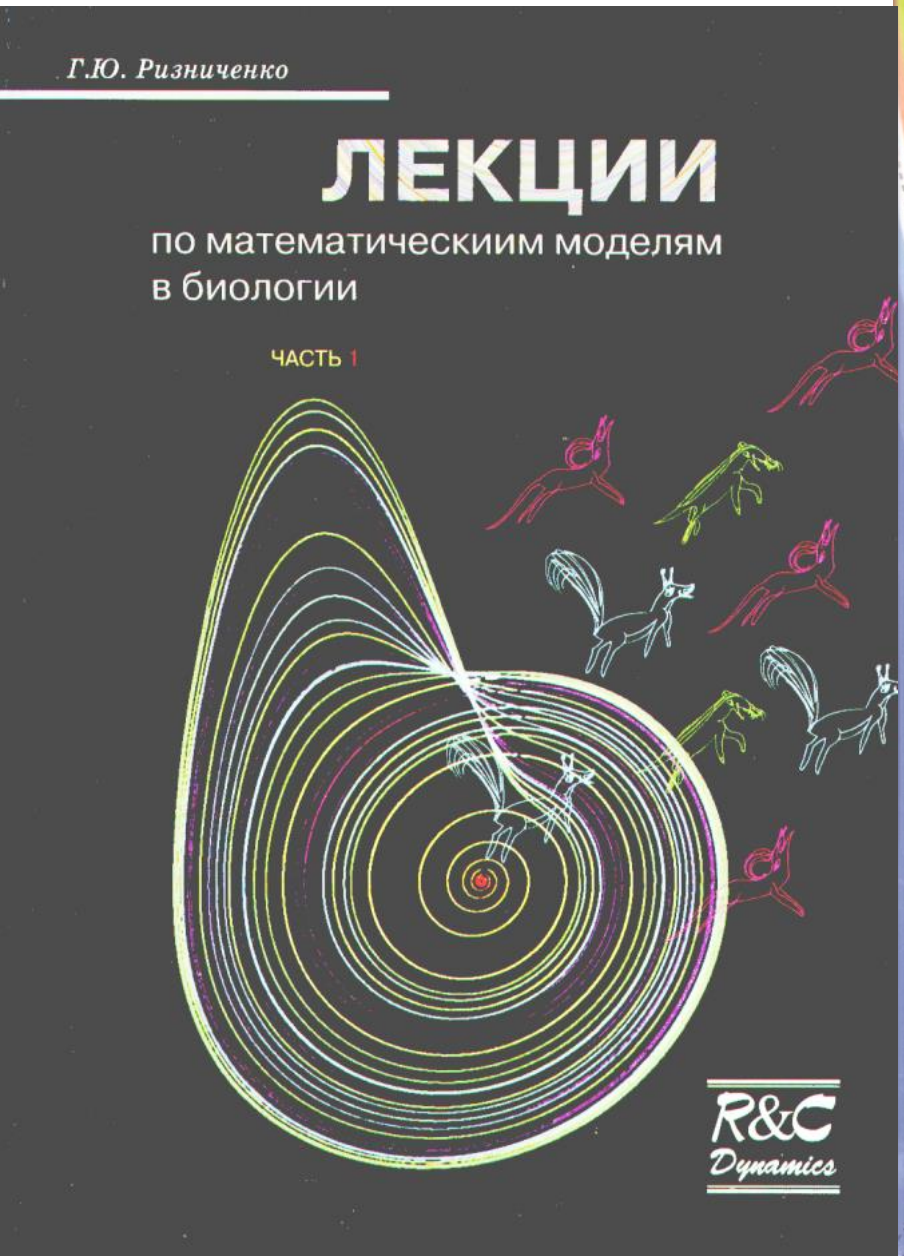
Модели популяционной динамики

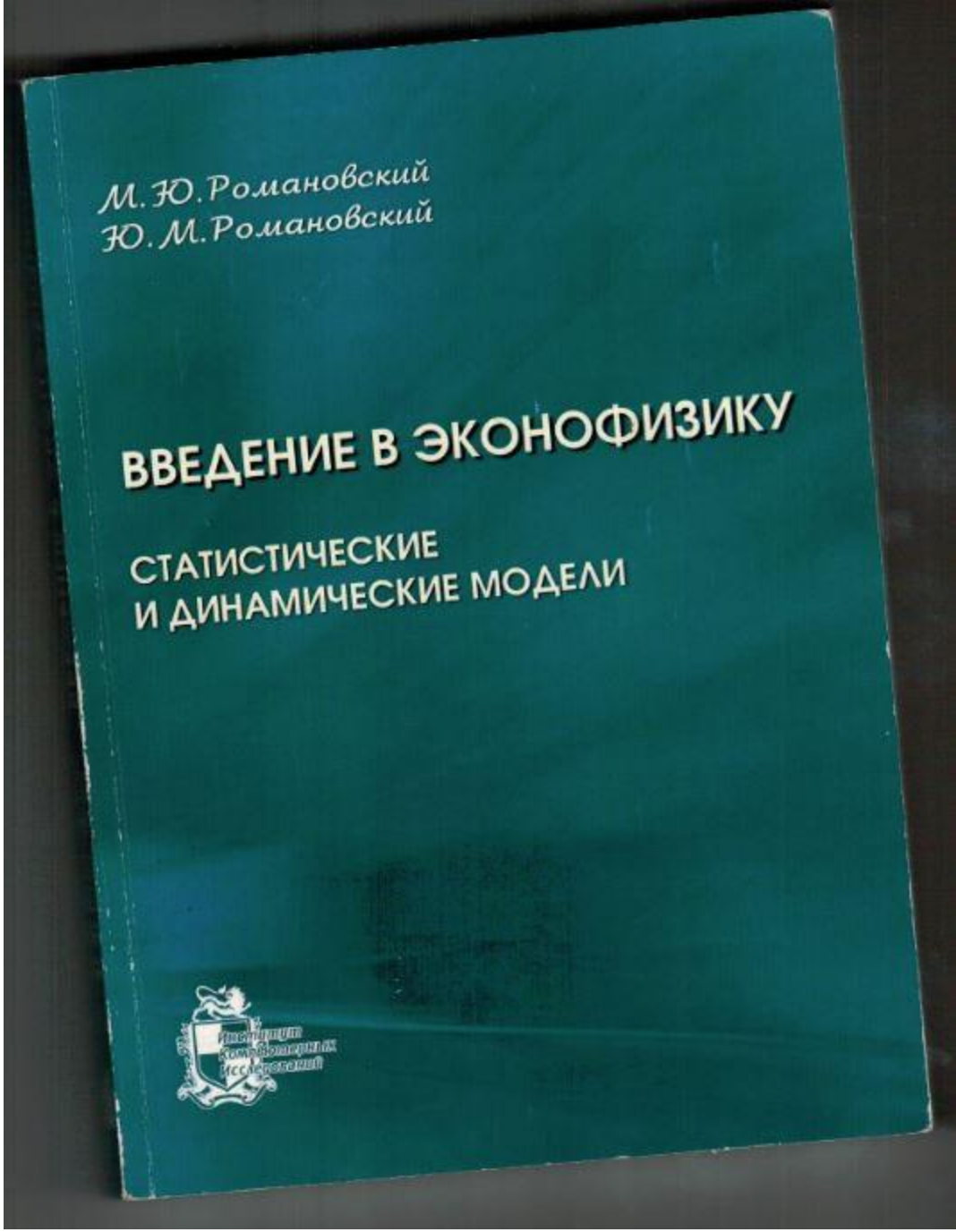
Ризниченко
Галина Юрьевна,
проф. каф. Биофизики
Биологического ф-та
МГУ, тел. (095)9390289;
E-mail:
riznich@biophys.msu.ru

Популяционная динамика –
математический полигон

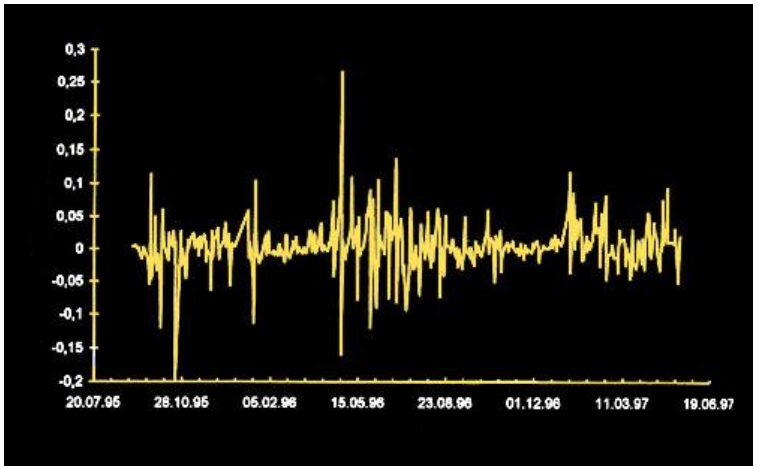


Ю.М.Романовский,
Н.В.Степанова,
Д.С.Чернавский

Математическая
биофизика
1975
1984
2004



Потребность в определенности –
естественная биологическая
потребность человека,
но она же – порок мышления



Динамика биржевых индексов

Мы живем не в
Среднестане, а в
Крайнестане

Ниссим Николас Талеб

- Некоторые думают , что я призываю не строить прогнозов и не пользоваться моделями. На самом деле я говорю: «не пользуйтесь линейными прогнозами при опасности колоссальных погрешностей…

Введение. Об изоморфизме законов природы

I. Модели роста отдельной популяции

1. Понятие эволюции (роста)

- 2. Экспоненциальный рост. Мальтус.
- 3. Логистический рост. Ферхюльст
- 4. Дискретные модели. Динамический хаос
- 5. Роль запаздывания, пространства и случайных факторов
- 6. Рост популяции человечества

II. Модели взаимодействия видов

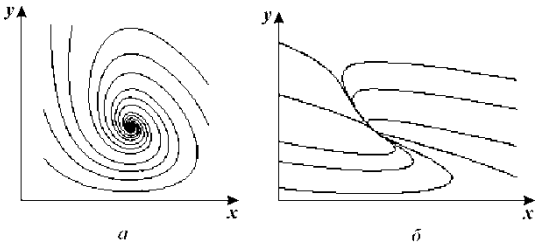
1. Взаимная синхронизация систем с запаздыванием (2 взаимодействующих региона, две фирмы)
2. Вольтерровские модели

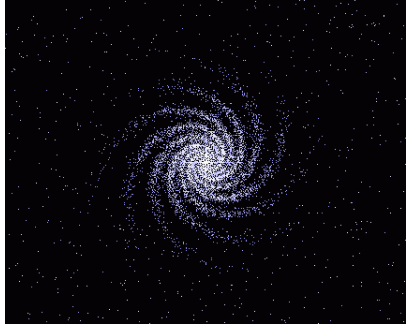
- Хищник-жертва
- Конкуренция
- Симбиоз
- 2. Обобщенные модели взаимодействия видов
- 3. Пространственно-временная динамика

III. Примеры простых моделей

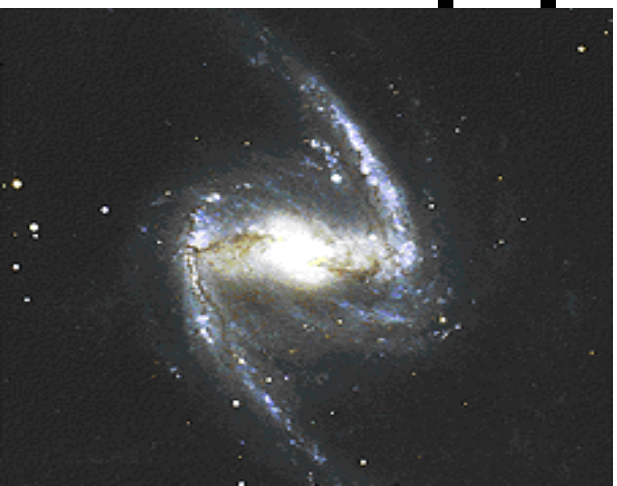
1. Юрий Исаакович Неймарк. Модель «производители- продукт-управленцы»

2. Дмитрий Сергеевич Чернавский. Базовая модель рыночной экономики в закрытом обществе

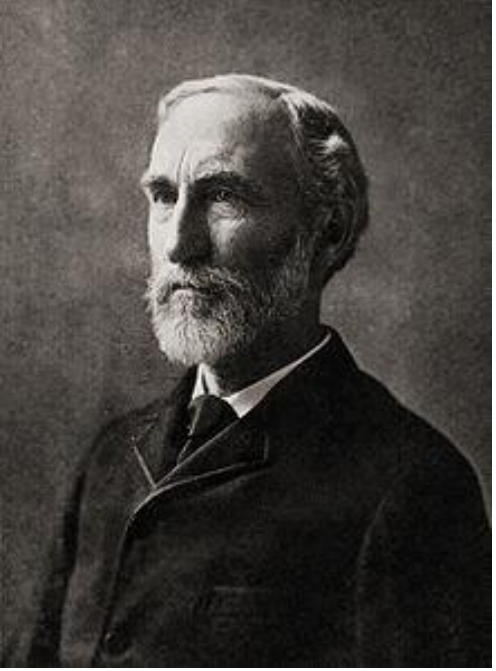




Изоморфизм – основа моделирования

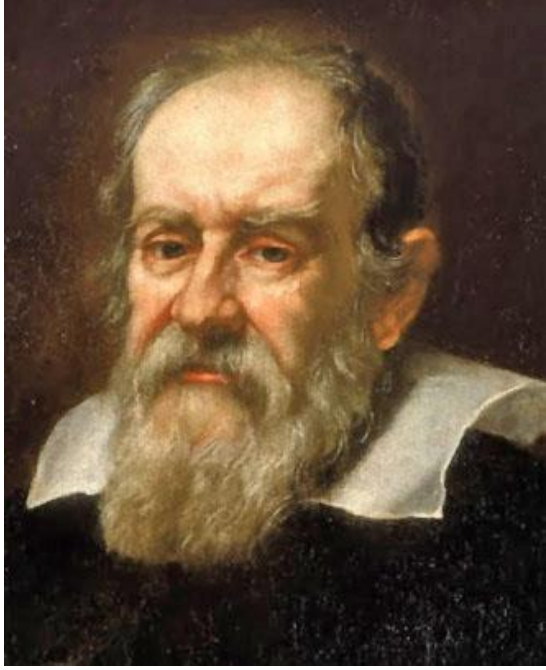


ВВЕДЕНИЕ



Математика – язык

Д. У. Гиббс Josiah Willard **Gibbs**; 1839—1903) — американский физик, физикохимик, математик и механик, один из создателей векторного анализа, статистической физики, математической теории термодинамики,



- словарь и звуковые и графические способы кодирования слов - числа, векторы, матрицы, функции
- Грамматики – действия с ними: сложение, вычитание, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование
- Грамматики математического языка – не только правила сочетания элементов (слов), но и правила преобразования одних слов в другие
- Аналог словесных описаний – математические модели

Галилео Галилей (1564 - 1642)

«… Великая книга природы написана математическими символами»

ИЗОМОРФИЗМ

- **Изоморфи́зм** (от др.-греч. ἴσος — «равный, одинаковый, подобный» и μορφή — «форма»)

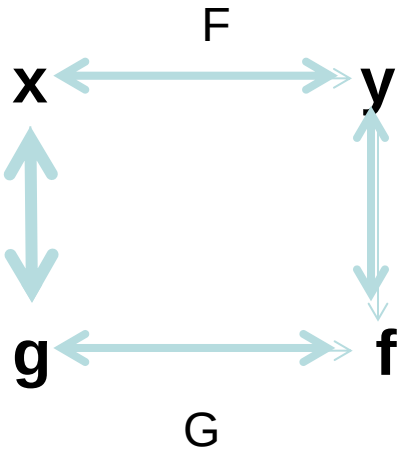
ХИМИЧЕСКАЯ Энциклопедия: **ИЗОМОРФИЗМ** (от изо... и греч. morphe - форма, вид), способность атомов, ионов или молекул замещать друг друга в кристаллич. структурах. В результате изоморфизма образуются твердые р-ры замещения. В-ва, к-рым присущ изоморфизм, наз. изоморфными.

- **ИЗОМОРФИЗМ**, **в** КРИСТАЛЛОГРАФИИ сходство структур кристаллов у различающихся между собой химических соединений.

- Лингвистика **Изоморфизм** - Параллелизм в организации звуковой и смысловой сторон языка

- МАТЕМАТИЧЕСКАЯ. Энц. **ИЗОМОРФИЗМ** - соответствие (отношение) между объектами или системами объектов, выражающее в некотором смысле тождество их строения.

Операционные системы

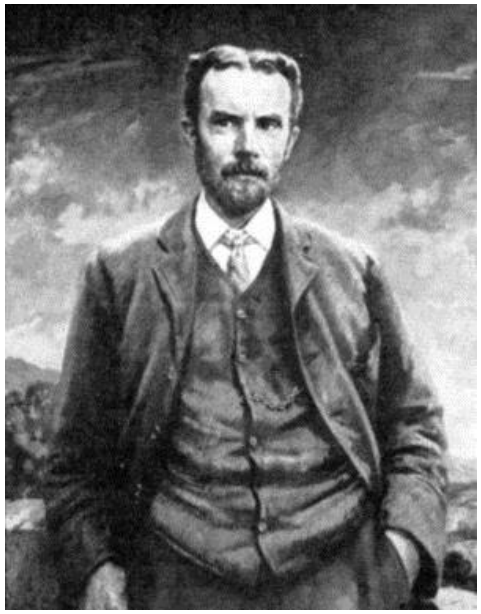


Совокупность элементов (слов) и действий (грамматика) – операционная система

Две операционные системы изоморфны. Если установлено взаимно однозначное соответствие, между их элементами и действиями

В разных операционных системах действия выполняются по-разному.

Пример: в арабской системе записи числа перемножить легко, а в римской – очень трудно



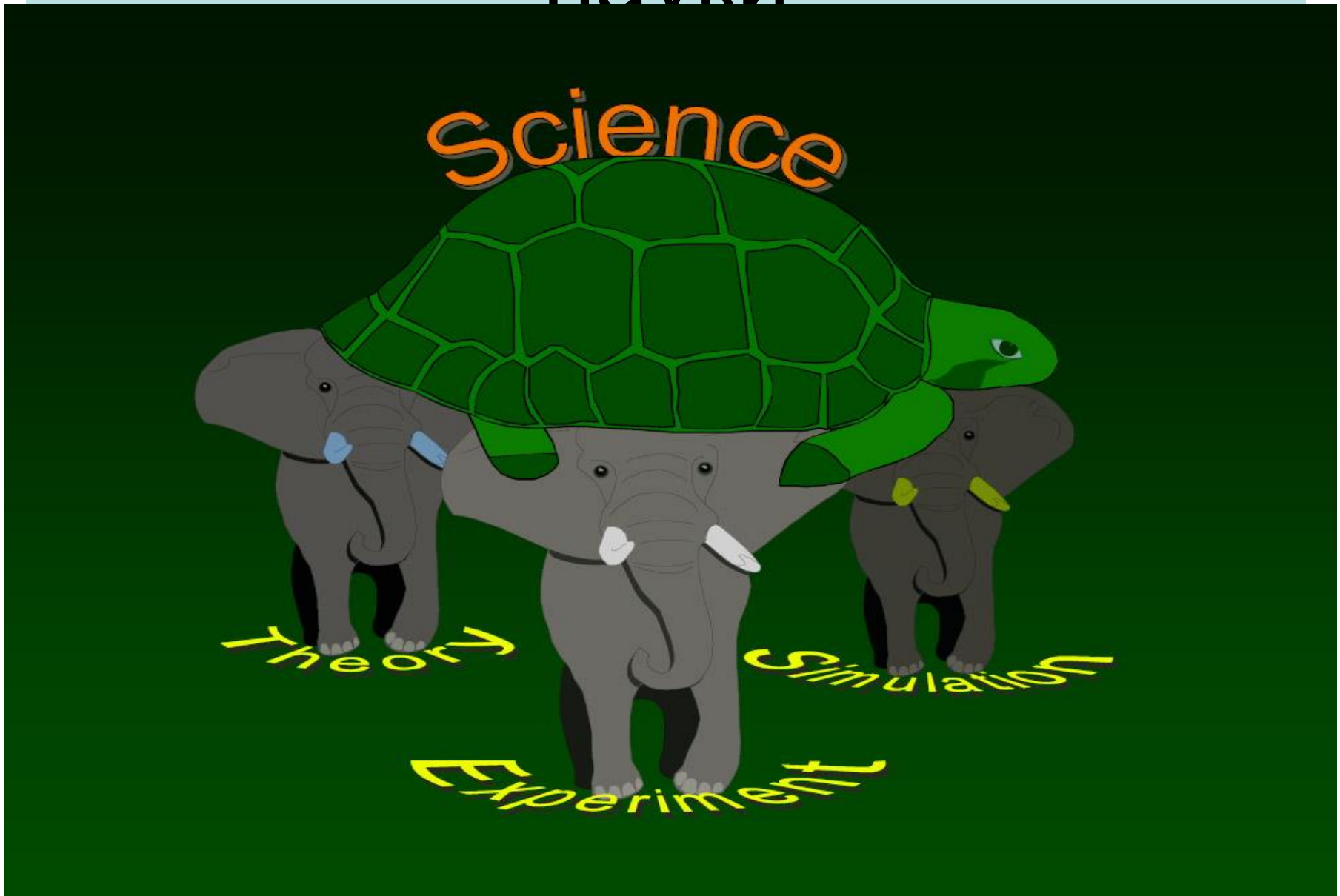
В системе Хевисайда легко дифференцировать и интегрировать, но трудно перемножать

- Óливер **Хéвисайд** (англ. Oliver Heaviside; 18 мая 1850 — 3 февраля 1925) — английский учёный-самоучка, инженер, математик и физик. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений

Операционная система компьютера

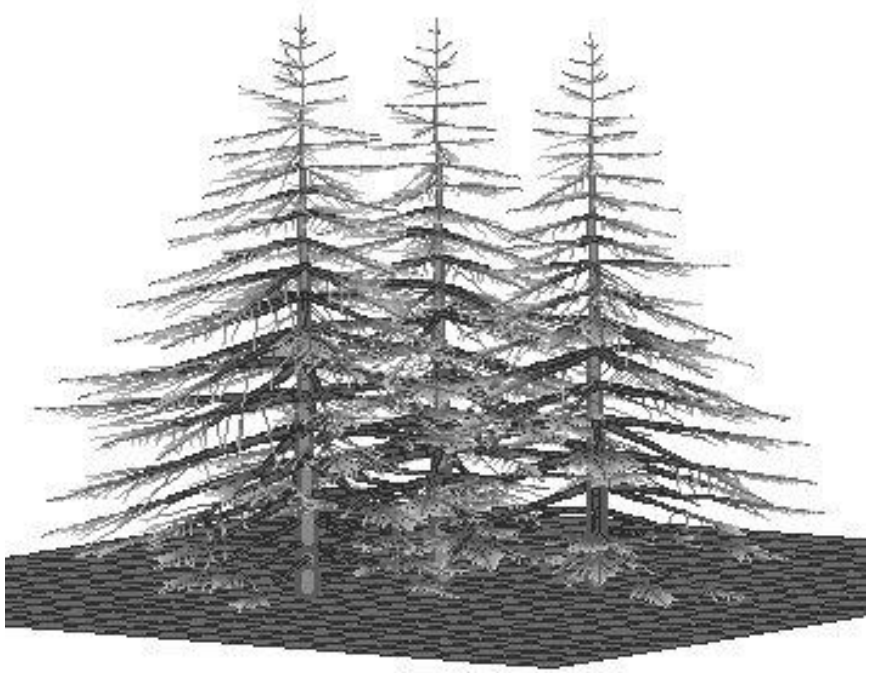
все действия выполняются легко и быстро (правда, приближенно)

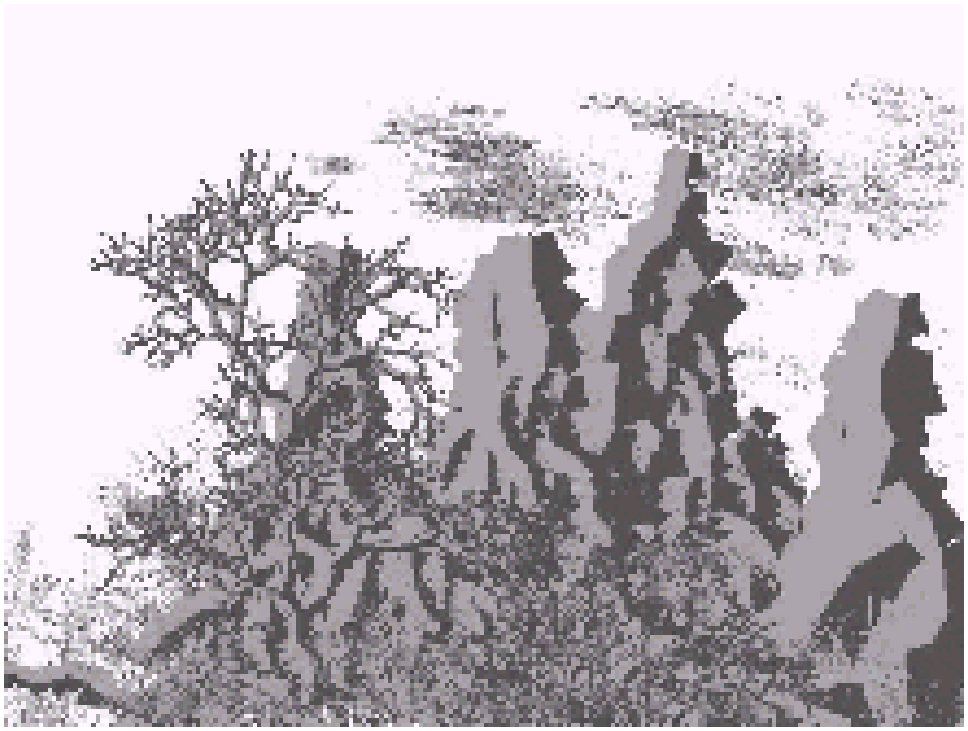
Три кита современной науки

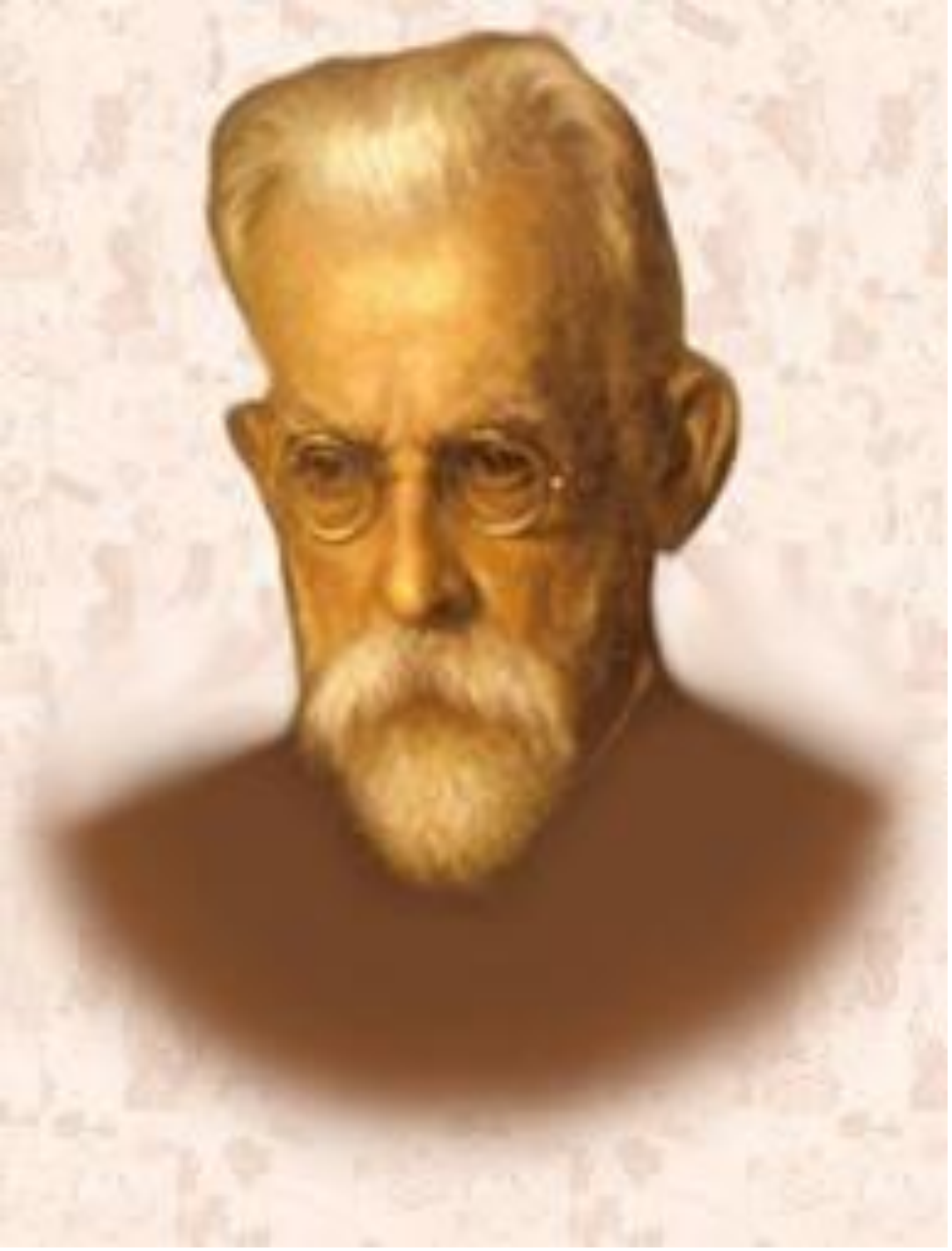


Пейзажи, полученные с помощью компьютерных грамматик. Галерея Олега Кислюка

http://www.fiztech-usa.net/kislyuk/





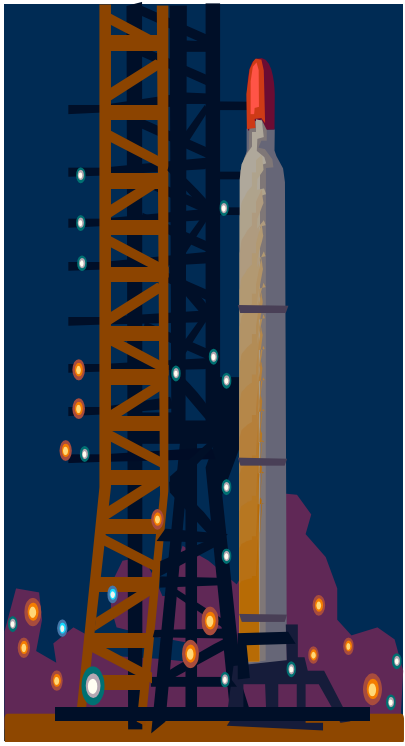


Владимир Иванович Вернадский

(1863-1945)

«Большая часть научной работы заключается в поиске математических соотношений.
Найдя их, наш ум успокаивается,
и нам кажется, что вопрос, который нас мучил, решен.»

Модели в науках



- Физика – от Галилея и Ньютона
- Язык законов физики – математика

- Химия – 20 век
- химическая кинетика, квантовая химия,
- Конец 20 века - молекулярное моделирование

Модели в биологии

- **До половины 20 века** – отдельные модели-аналогии:

- Модели популяций
- Математическая генетика
- Модели кровообращения (Бернулли)
- Механические модели движения

- **2-я половина 20 века**.

- Качественные (базовые)
- нелинейные модели.
- Модели популяционной динамики
- Клеточные автоматы

- Молекулярное моделирование
- Агентное моделирование

- **21 век** – модели сложных систем
- Модели в социальных науках

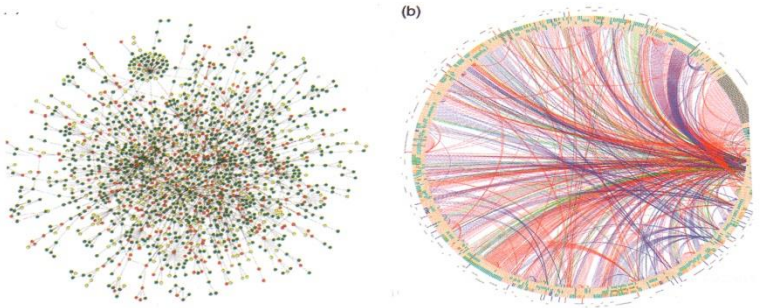
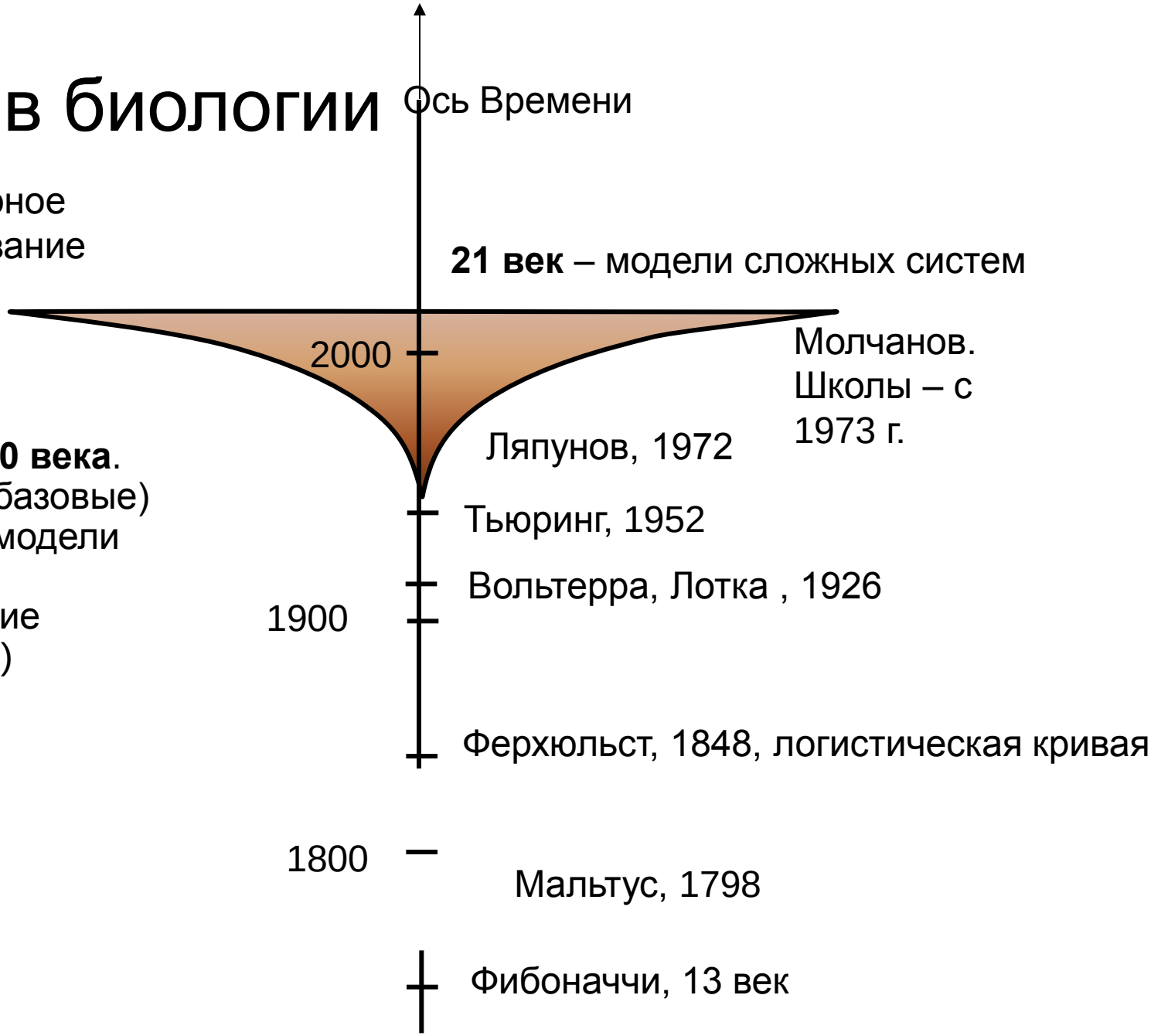


Figure 8.1 Biological networks. (a) Network of protein–protein interactions in yeast. From Jeong et al. [4]. (b) Regulatory interactions between *E. coli* genes. Genes shown as colored segments associated with the structural description of the gene's main function. Curve colors express the nature of relation (red: inhibition, blue: activation, green: dual regulation), and the traces around the circle indicate autoregulation. Courtesy of S. Ortiz, L. Rico, and A. Valencia.

Systems biology. A Textbook.
Klipp et al.

Модели в биологии

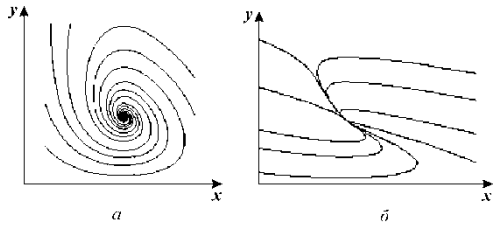


Изоморфизм законов в системах разной природы

- Геометрический изоморфизм – древние греки Подобие геометрических фигур

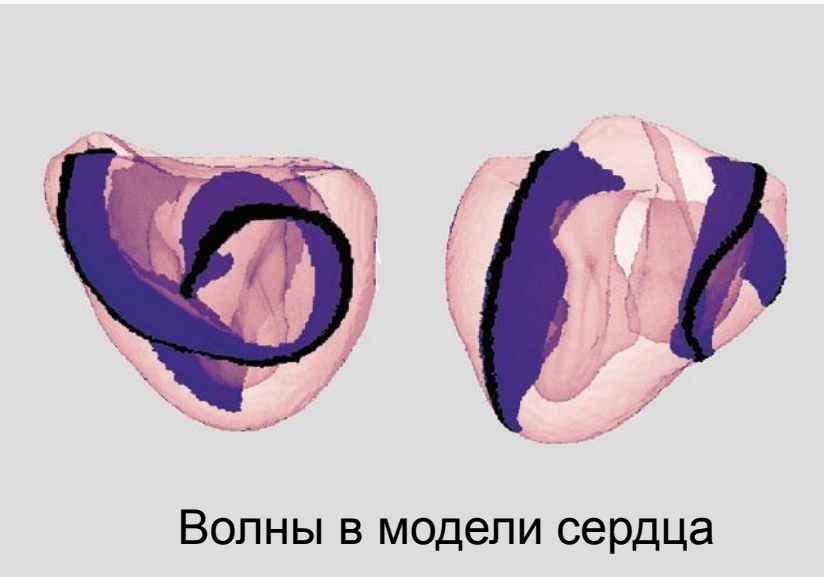
- Физика - Гармонический осциллятор:
- маятник (шарик на закрепленной нити)
- шарик на пружинке
- электрический колебательный контур

Изоморфизм



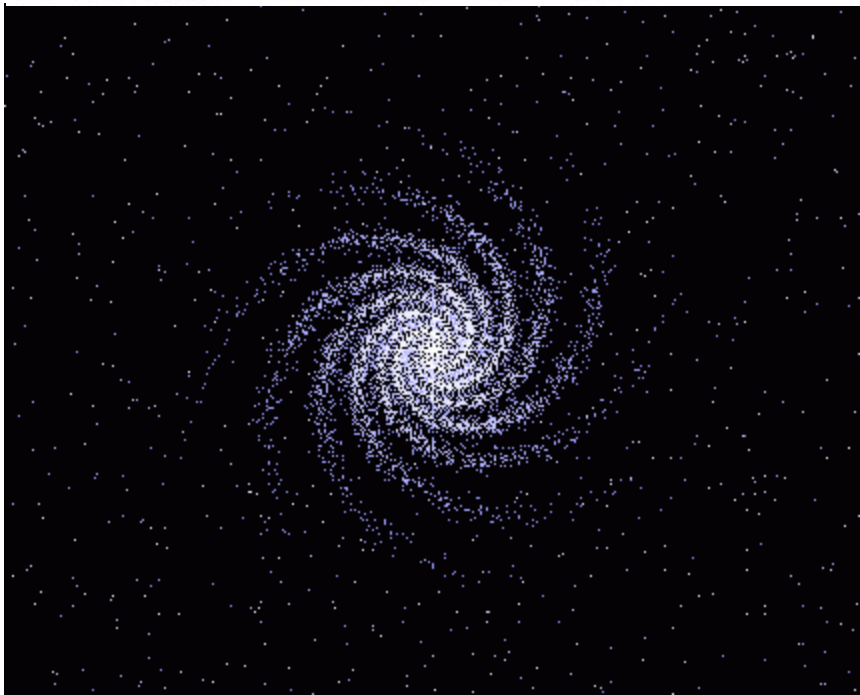
Фазовые портреты модели Лотка

Система Белоусова-Жаботинского



Волны в модели сердца

галактики



Синергетика

Изоморфизм законов самоорганизации

Теория динамических систем

- Нелинейная динамика
- Теория хаоса
- Теория фракталов
- Nonlinear science
- Science of complexity

Герман Хакен
Род. 1927

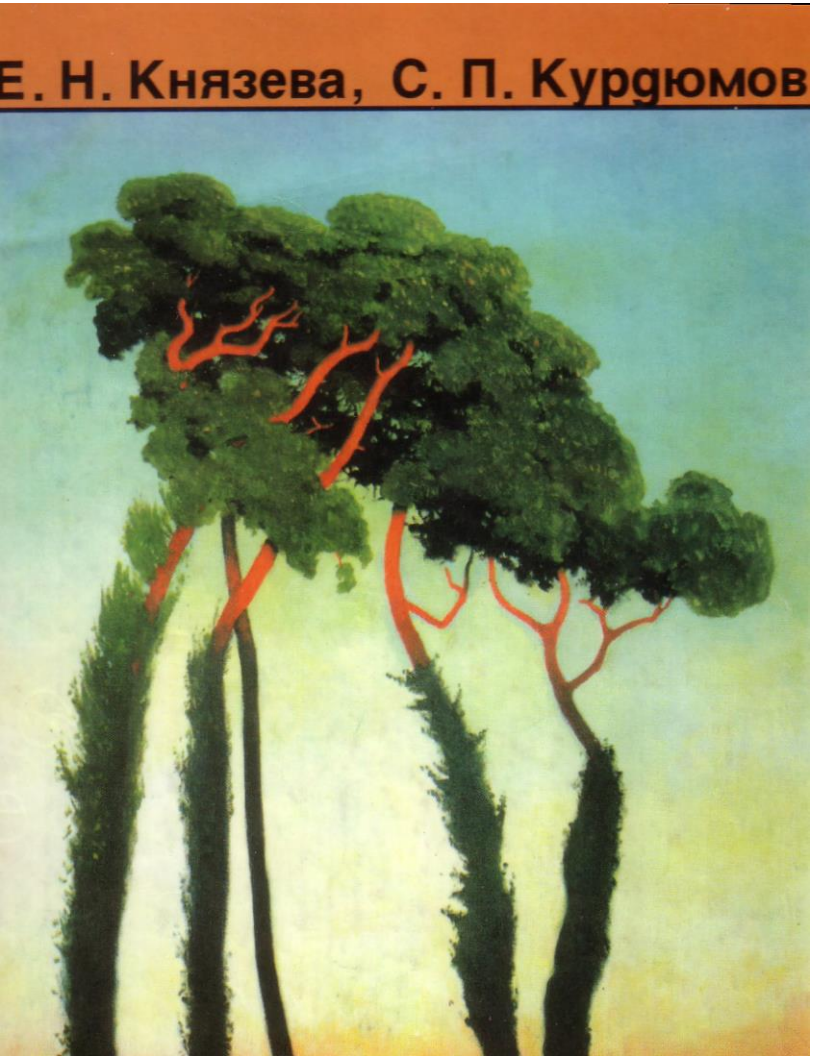
Автор термина «синергетика»

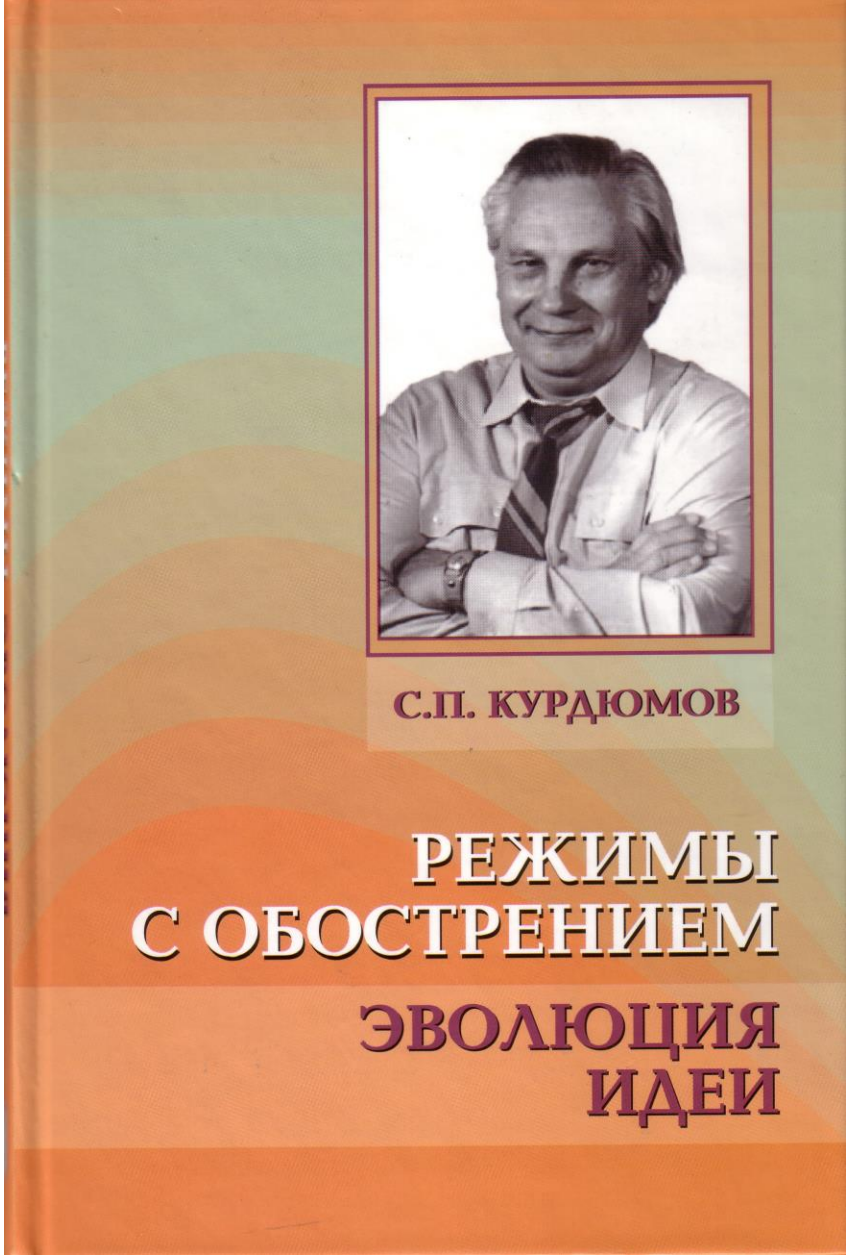
Илья Романович Пригожин
1917-2003

цель которых – понять суть и общность нелинейных процессов в сложных системах

Параллельно развивались компьютеры и информационные технологии

Сергей Павлович Курдюмов 1929-2004



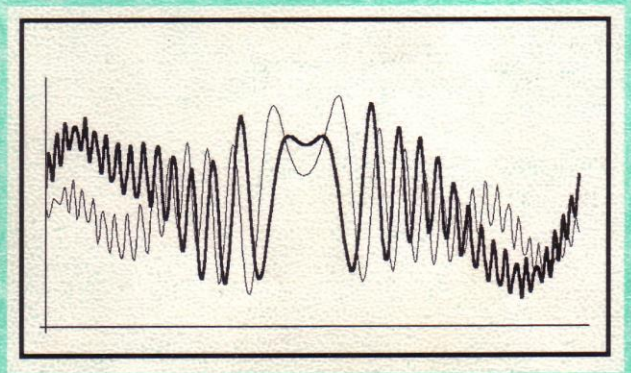


Основания синергетики

Синергетика
От прошлого к будущему

Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ



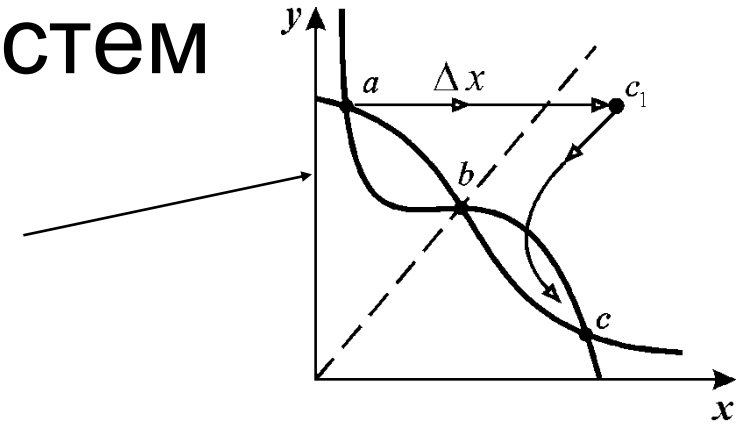
УРСС

С.П. Курдюмов

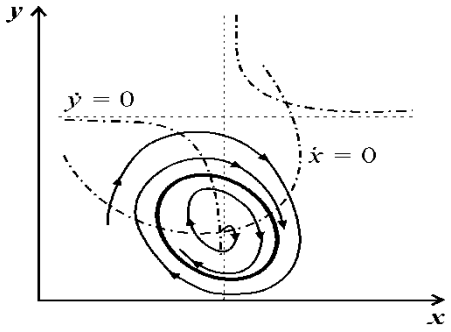
Мне нужно быть

Основные свойства нелинейных систем

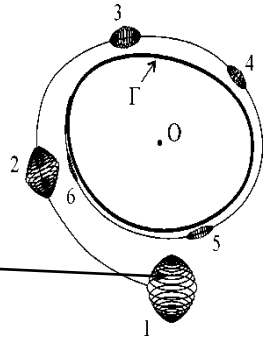
- Мультистационарность

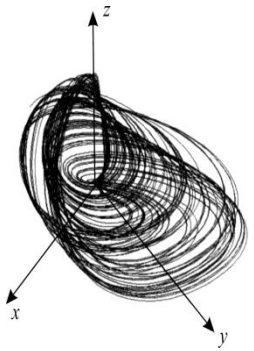


- Колебания

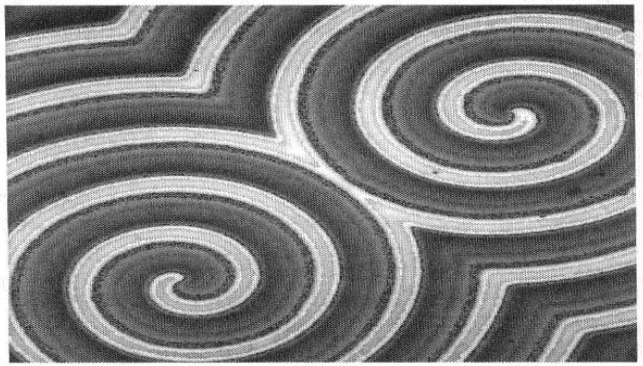


- Хаос



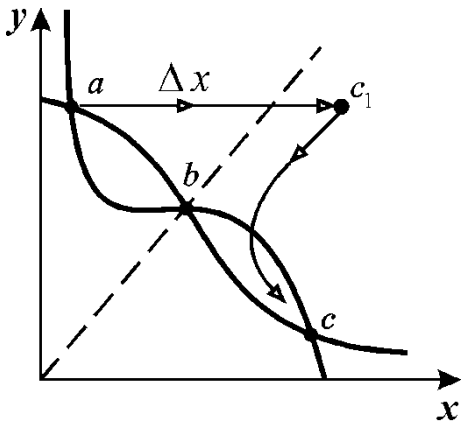


- Пространственно
- -временные структуры.
- Автоволновые
- процессы



Изоморфизм

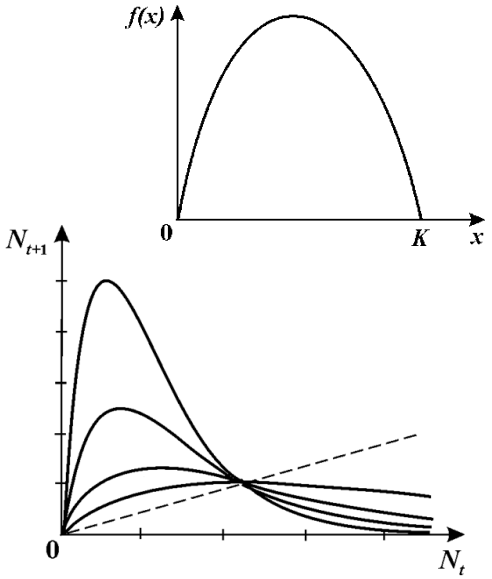
- 1. **Изоморфизм элементов и их соотношений**



- Конкуренция– взаимное угнетение
- Конкуренция биологических видов за пищу и места обитания
- Конкуренция фирм, производящих продукт, за покупателя
- Конкуренция политических партий за власть

- **2. Сходство паттернов**

- Зависимость скорости роста от численности имеет мах



- Колебания численности насекомых, грызунов, вспышки численности
- Бумы и спады в экономике. Хаотическое поведение биржевых индексов

χαος

CHAOS

Александр Юрьевич Лоскутов 1960-2011

Weather

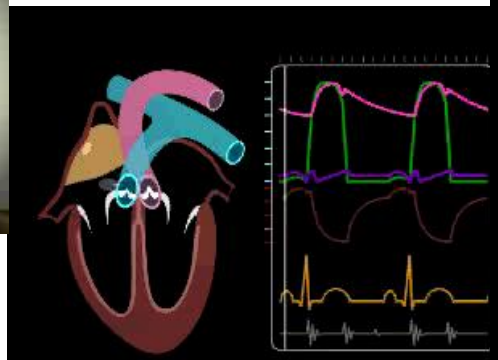
Э.Лоренц

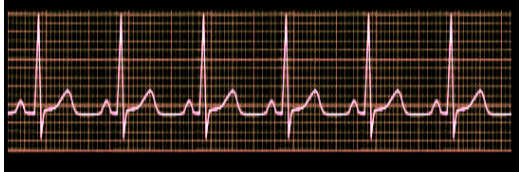
Chemical Kinetics

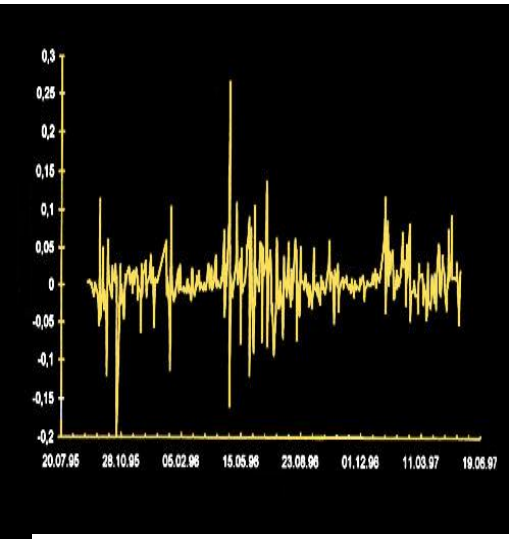
BZ-reaction

Белоусов и Жаботинский

Heart rythm

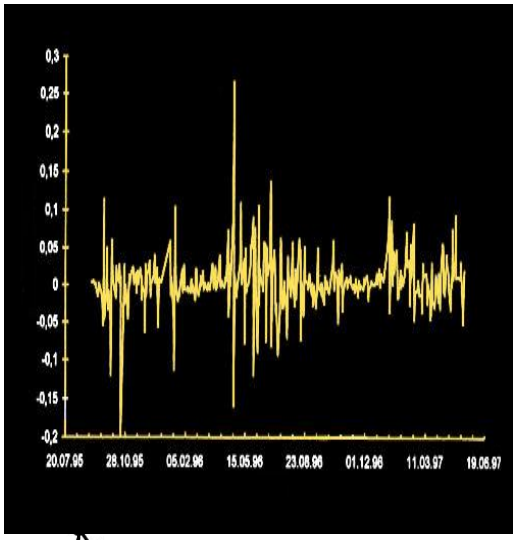


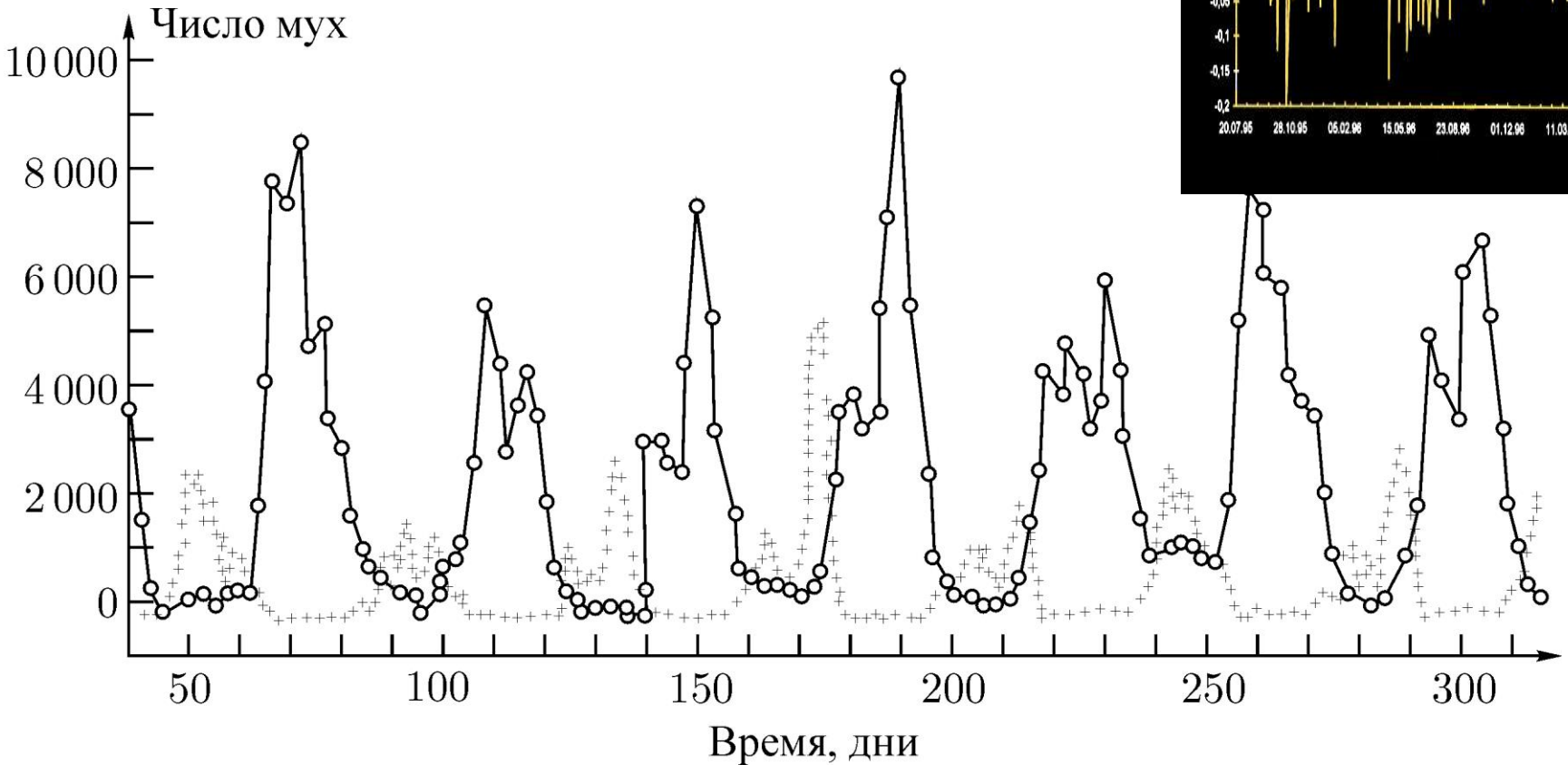




Биржевые индексы

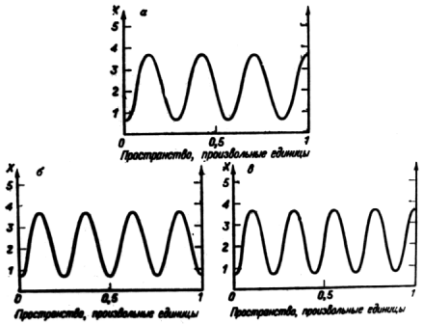
Численность мух Lucilia в популяционном ящике (Nicholson, 1954)
1 – взрослые особи. Крестики – число яиц, отложенных за один день





Изоморфизм законов взаимодействия

- Близкодействующая активация и дальнодействующее ингибирование приводят к пространственной неоднородности
- формирование окраски шкур животных,
- формирование городских анклавов



Алан Тьюринг
1912-1954

Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis.
Phil.Trans.R.Soc. London B, 1952

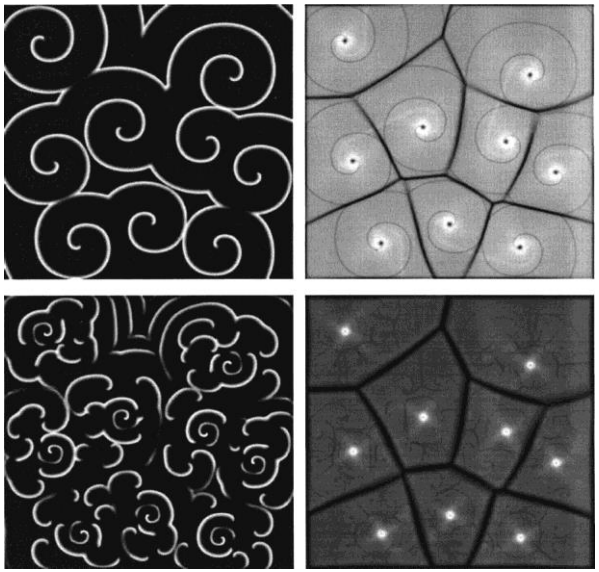
$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y, r) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

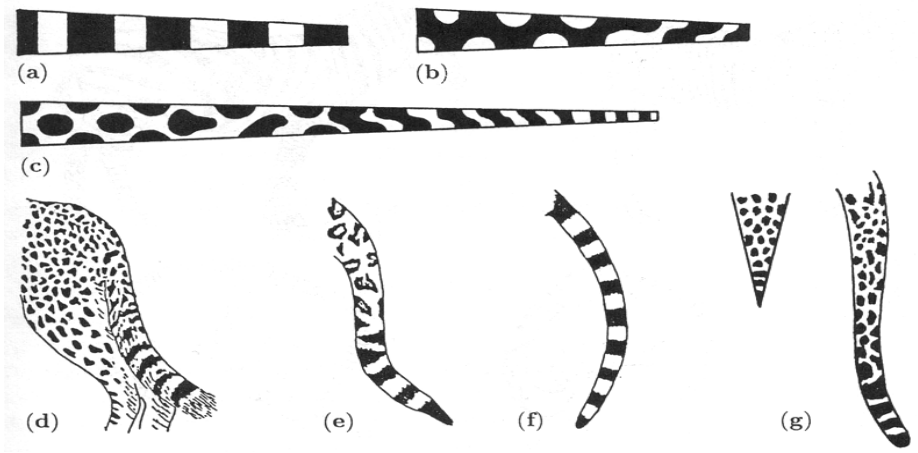
$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y, r) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

Раскраска шкур животных
J. Murray

Форма раковин
Mainhardt

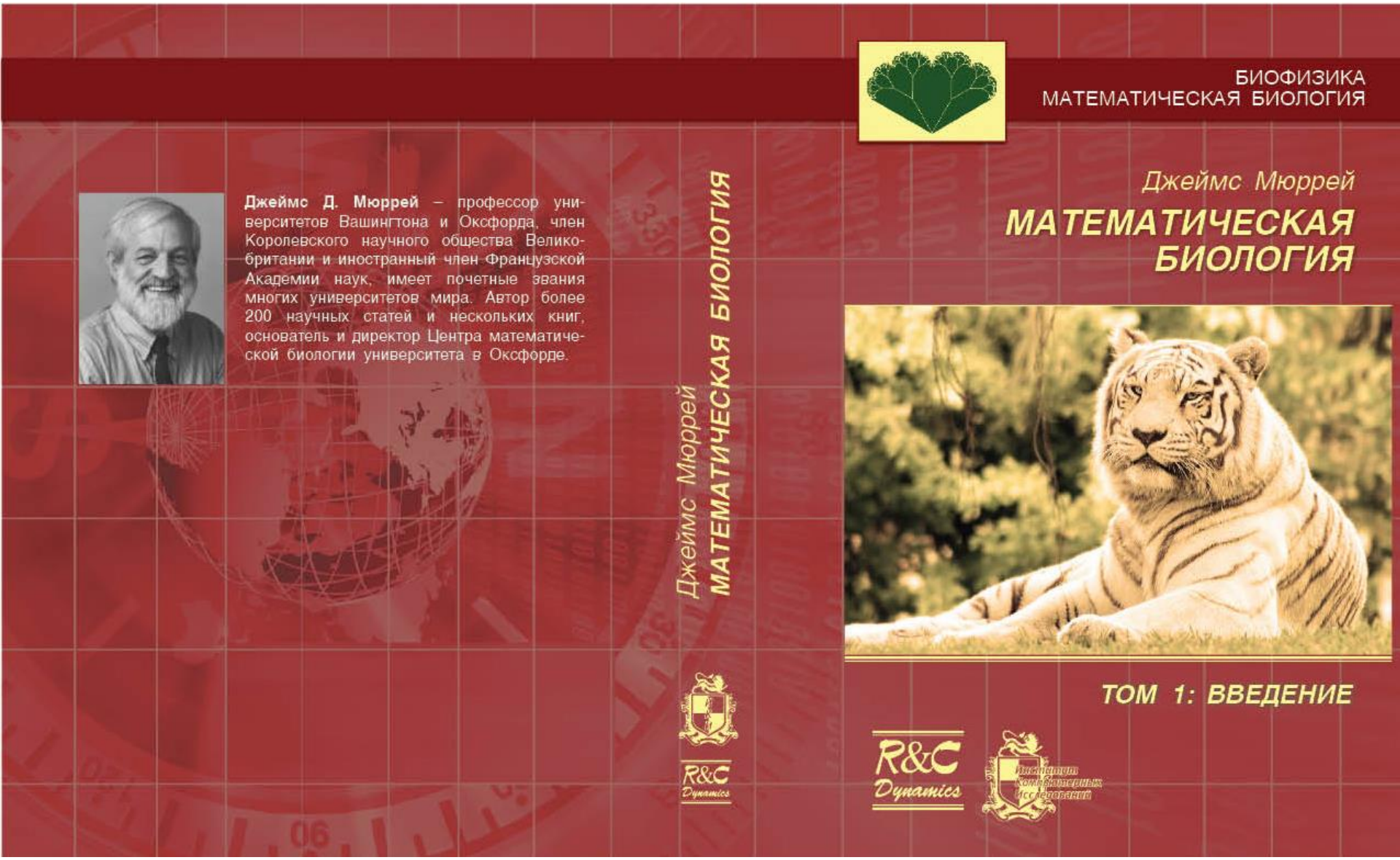
Колонии бактерий
М.А.Цыганов, А.А.Полежаев





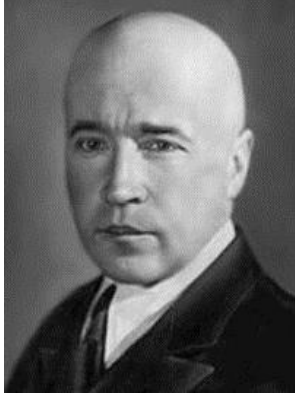
Пространственные структуры

Перевод 1-го (2009) и 2-го (2011) тома Д.Мюррей. Изд. РХД



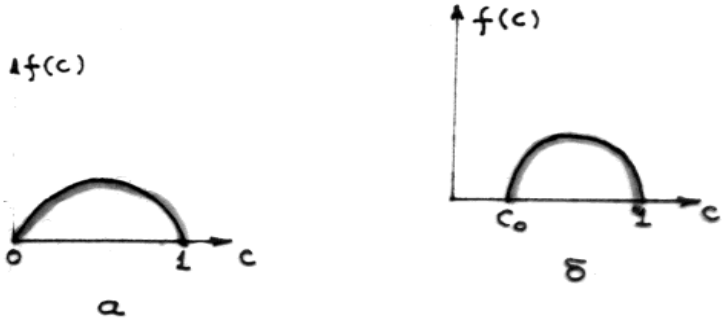
Распространение волны в системах с диффузией

Модель Петровского-Колмогорова- Пискунова



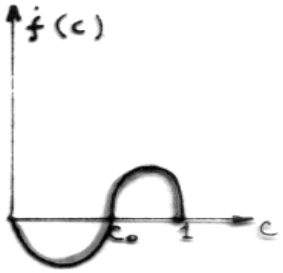
Иван Георгиевич Петровский 1901-1973

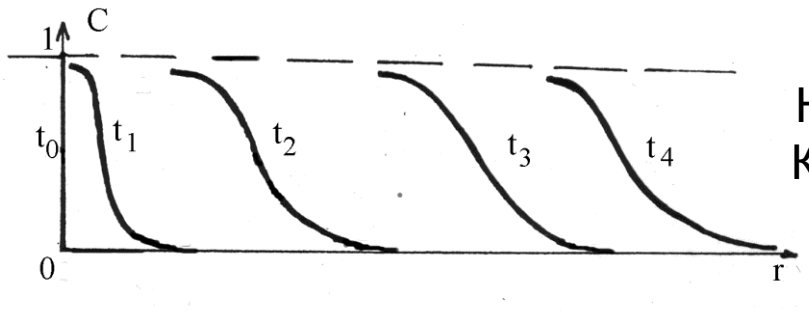
Колмогоров А.Н., Петровский Н.Г., Пискунов Н.М.
Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюл. МГУ, Сер. Математика и механика. 1937



$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + f(C)$$

Функции правой части





Андрей Николаевич Колмогоров, 1903-1987

Модель распространения доминирующего вида
Распространение пламени
Распространение слухов

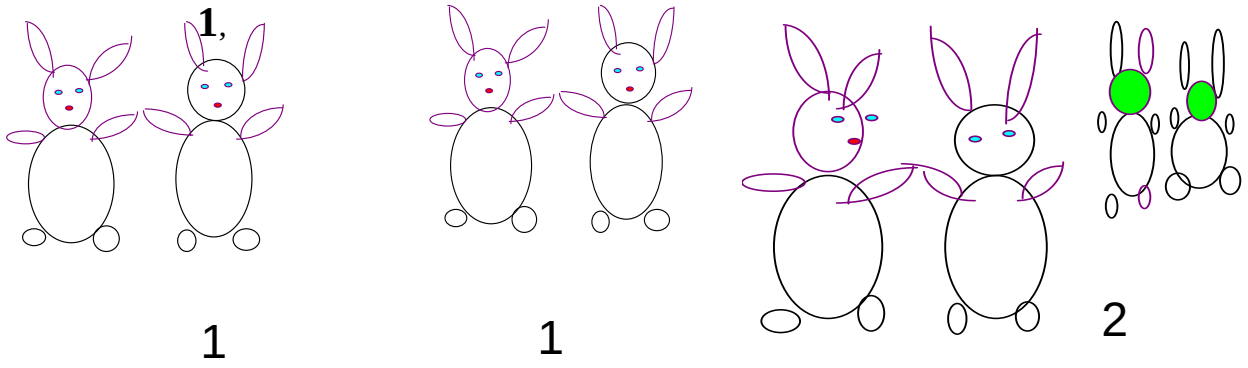
$$\lambda_0 = 2\sqrt{D \cdot f'(0)}$$

Модели роста популяции

Популяционная динамика – «математический полигон»

- 1. Модель Фибоначчи
- 2. Экспоненциальный рост. Мальтус.
- 3. Логистический рост. Ферхюльст
- 4. Дискретные модели. Динамический хаос
- 5. Роль запаздывания, пространства и случайных факторов
- 6. Рост популяции человечества

Ряд Фибоначчи



Leonardo Pisano
1170-1250
«Книга абака»

Fibonacci -
сын Боначчи
или
«Удачливый»

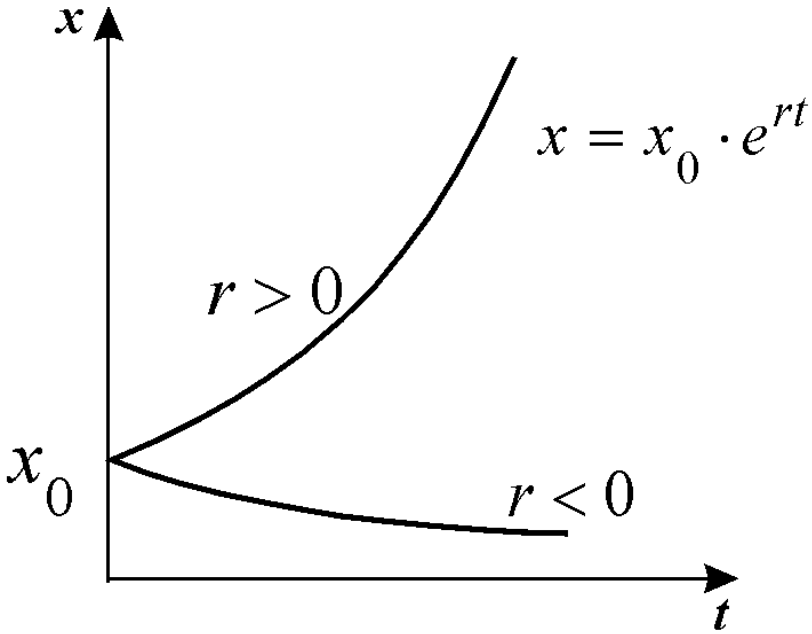
Леонардо из Пизы («Трактат о счете», 13 век)

Модель экспоненциального роста Мальтуса («О росте народонаселения» 1798)

$$N_{t+1} = qN_t$$

$$N_{t+1} = q^n N_0$$

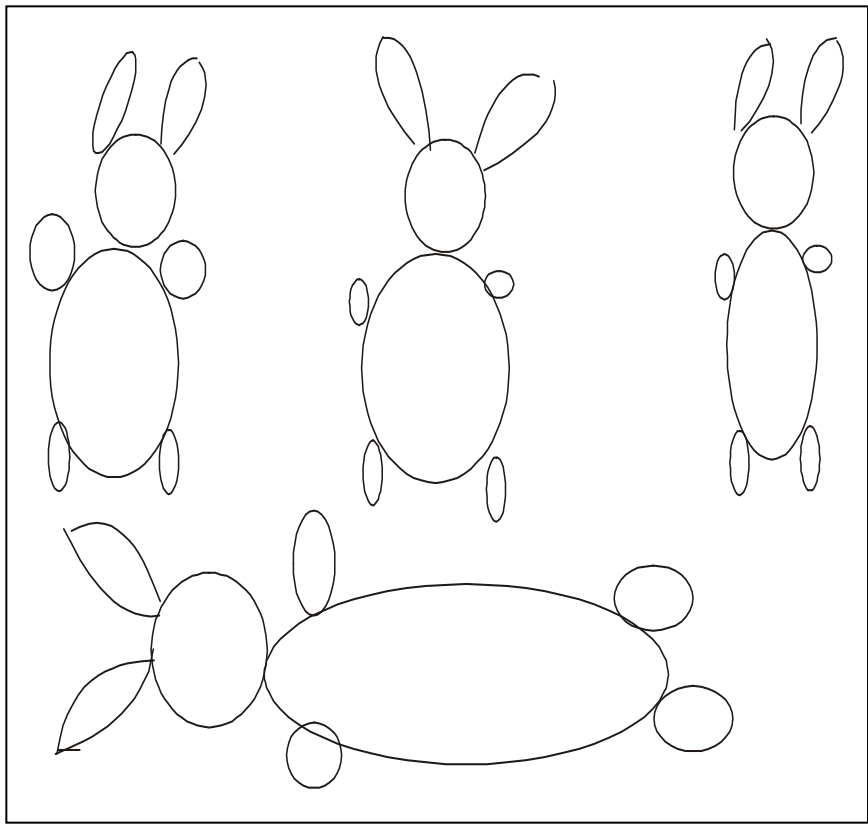
$$\frac{dx}{dt} = rx.$$



Уравнение логистического роста (Ферхюльст, 1845)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

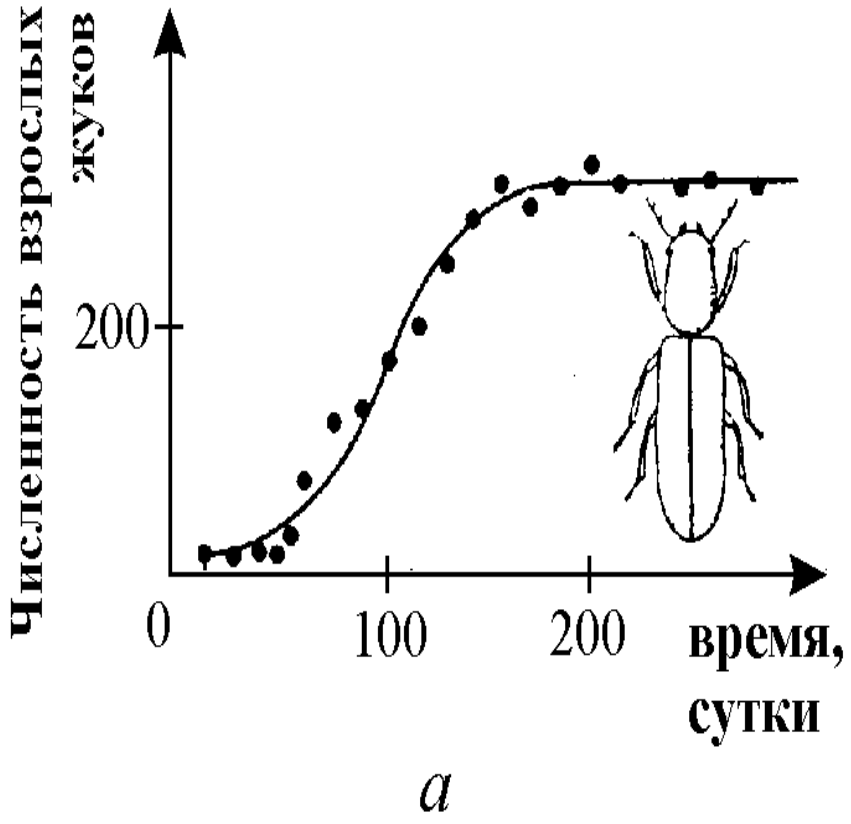
r – константа скорости роста
K – емкость экологической ниши



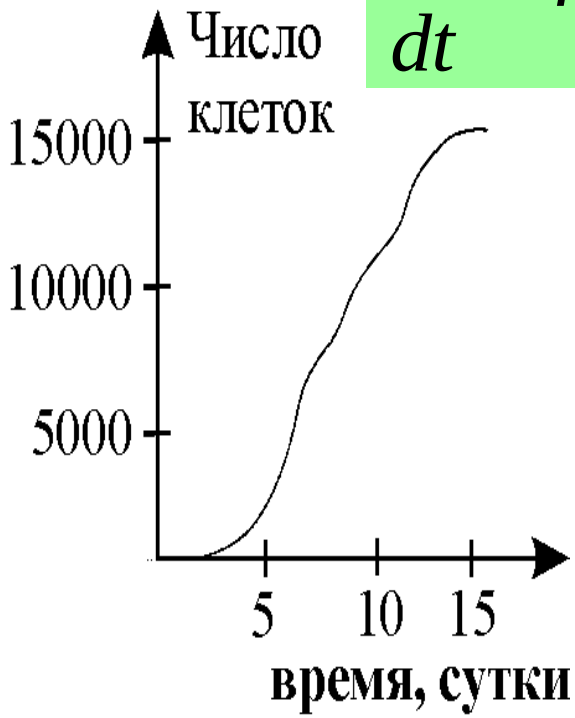
К – системный фактор

Ограниченный рост (уравнения Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$



а



б

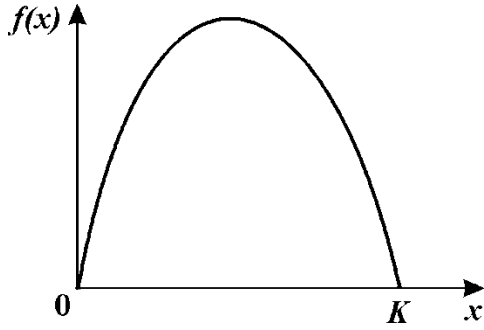
Жук *Rhizoretha dominica* в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю (Crombie, 1945).

Водоросль *Chlorella* в культуре

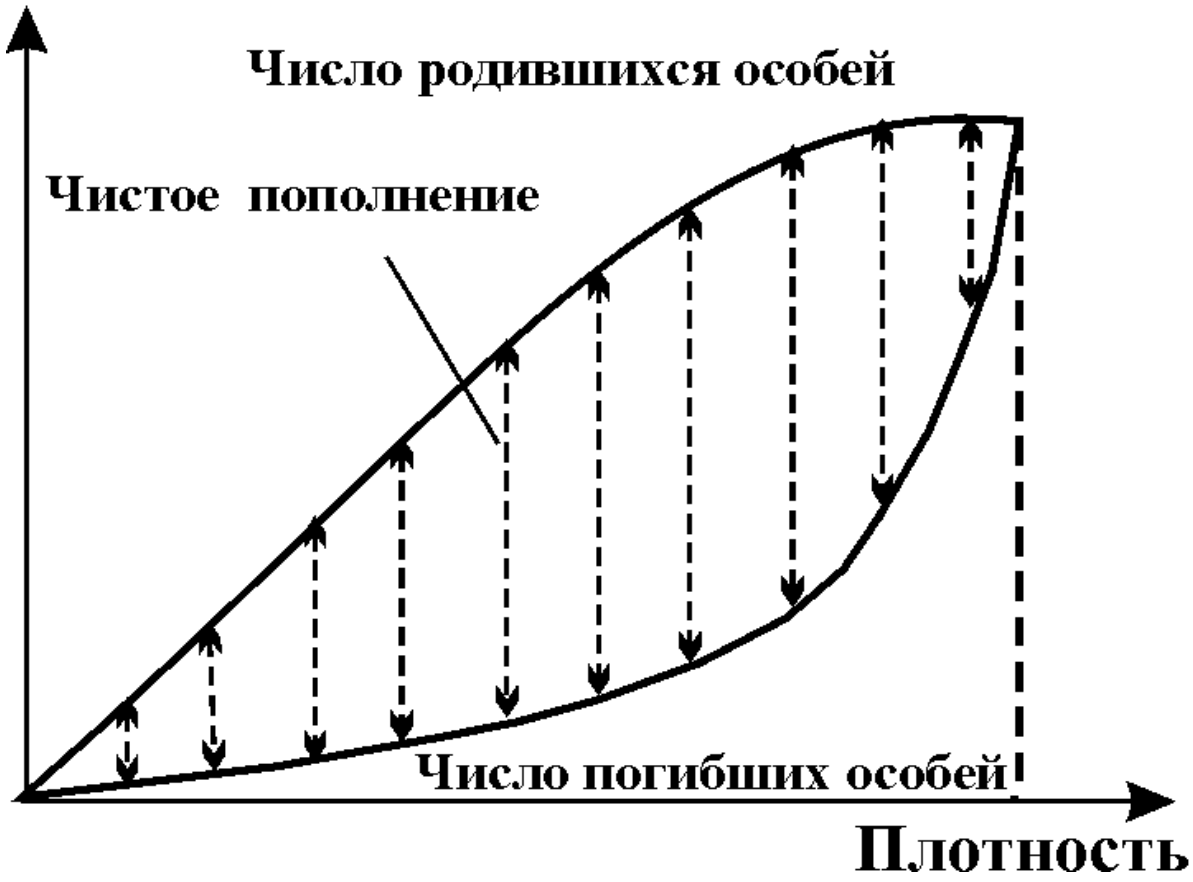
(Pearsall, Bengry, 1940)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

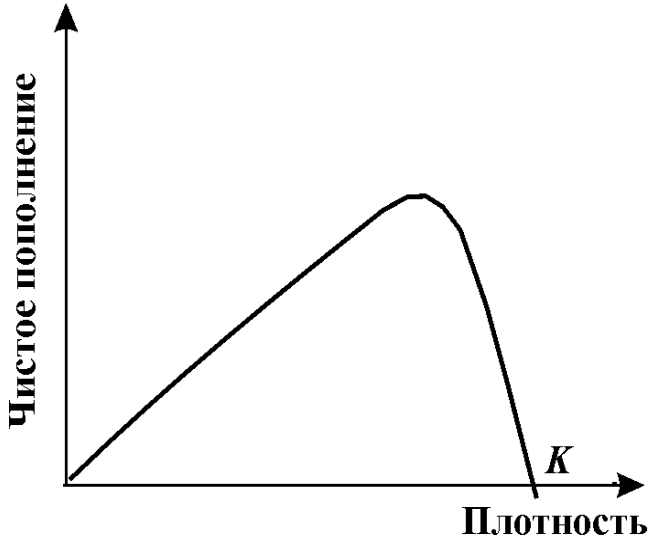
Кривые пополнения



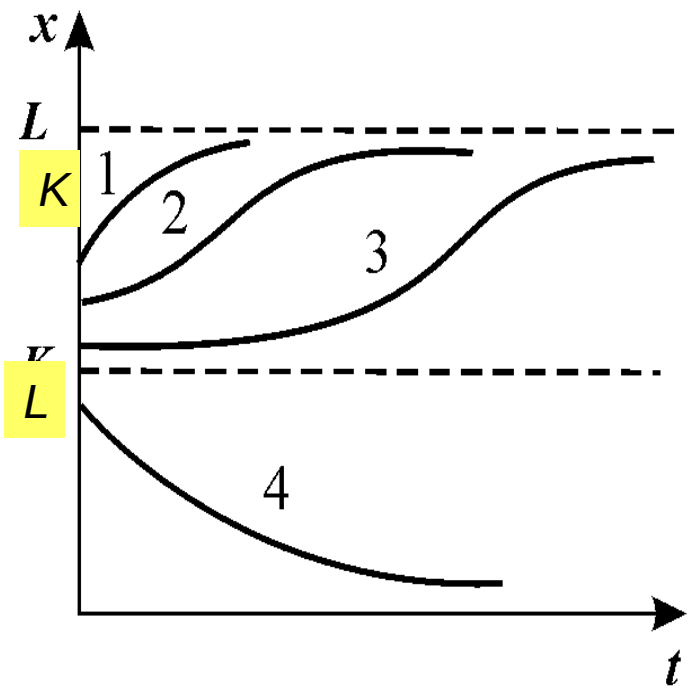
а



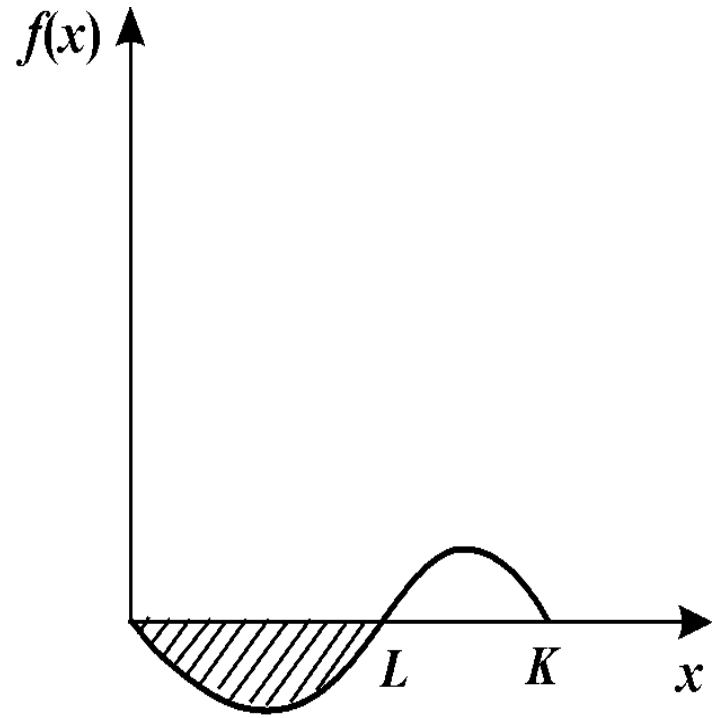
б



Наименьшая критическая численность



а

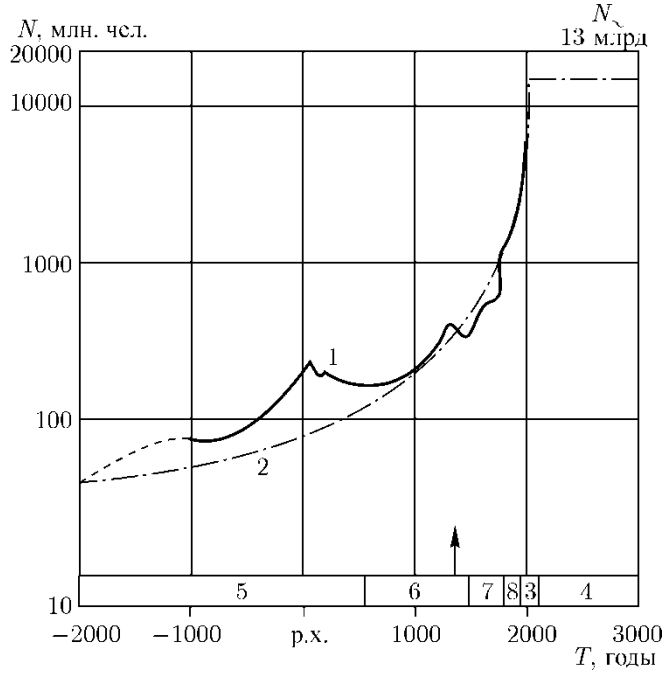


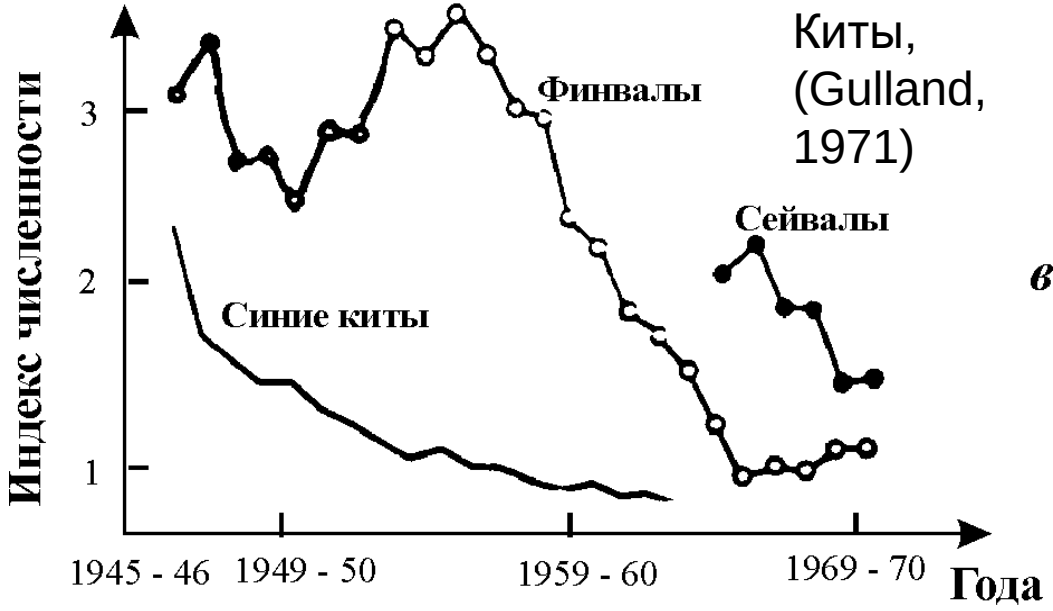
б

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$

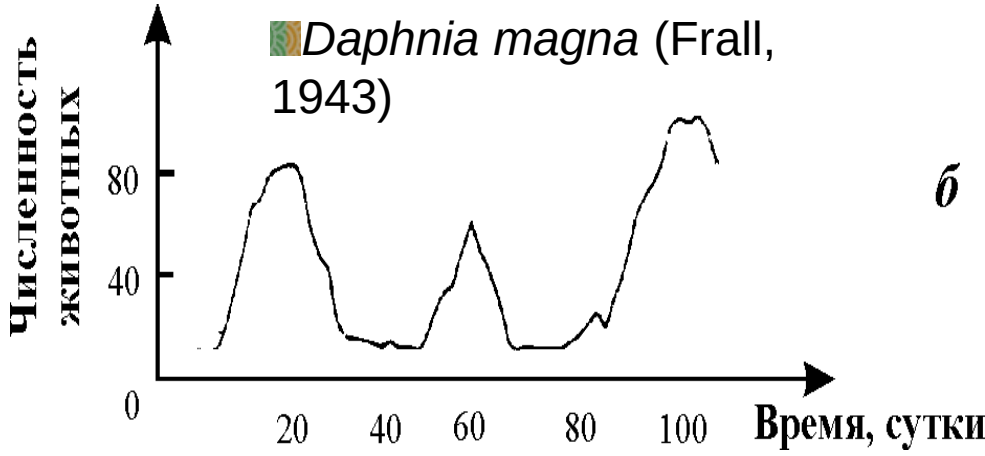
Нелинейный мир

Рост человечества. Капица. 2004





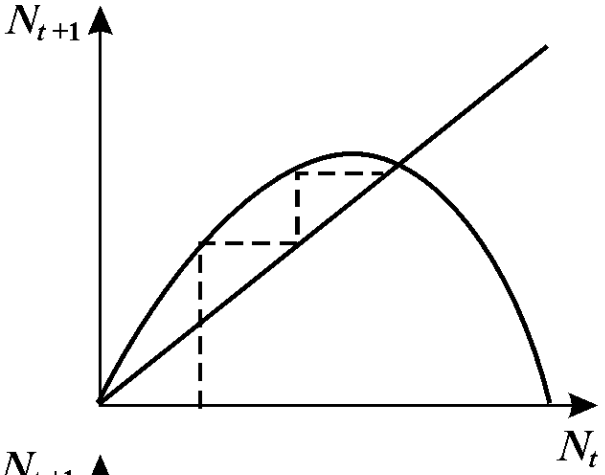
Киты, (Gulland, 1971)

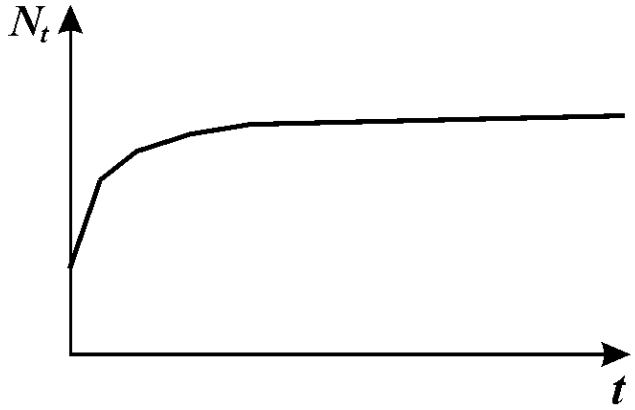


Daphnia magna (Frall, 1943)

Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

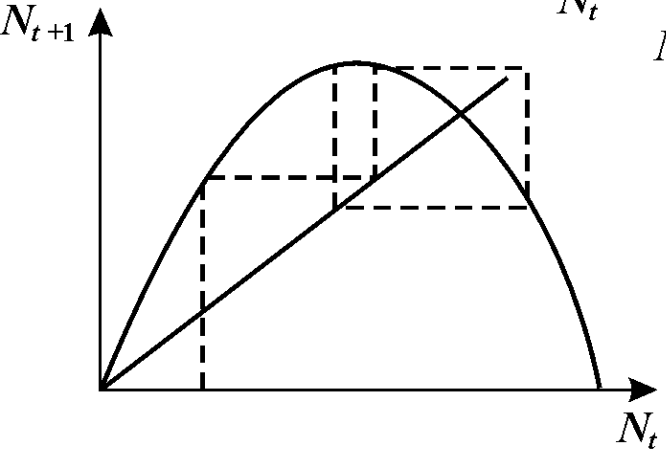


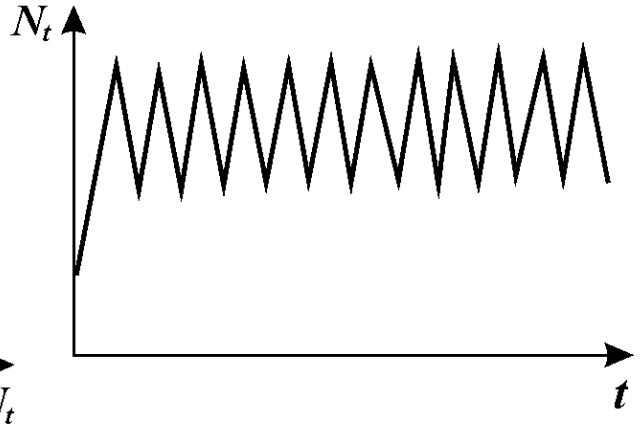


а

Квадратичное отображение

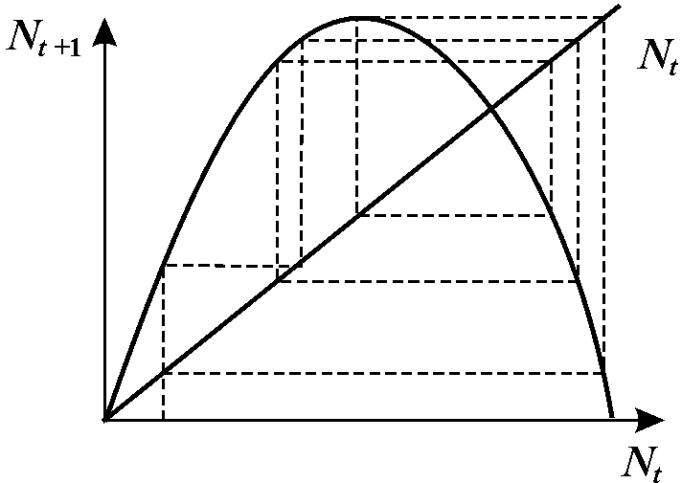
$$N_{t+1} = aN_t(1-N_t)$$

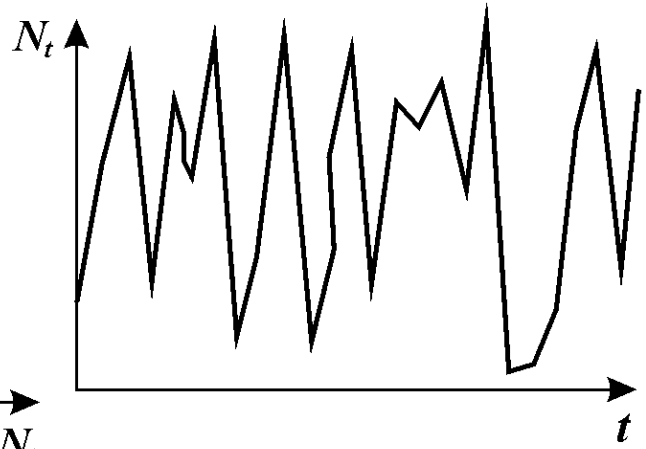




б

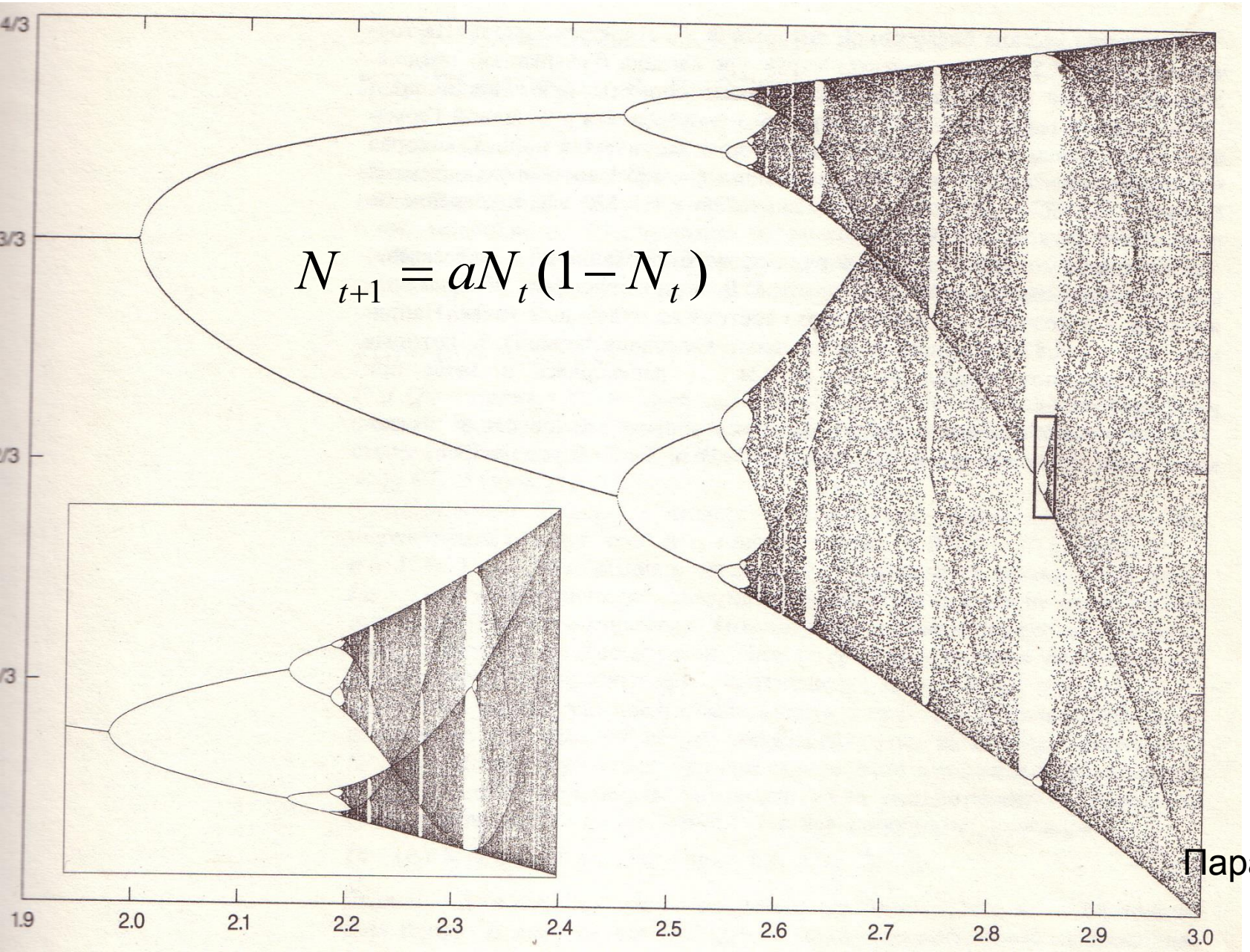
$$\frac{dx}{dt} = rx(1-\frac{x}{K})$$



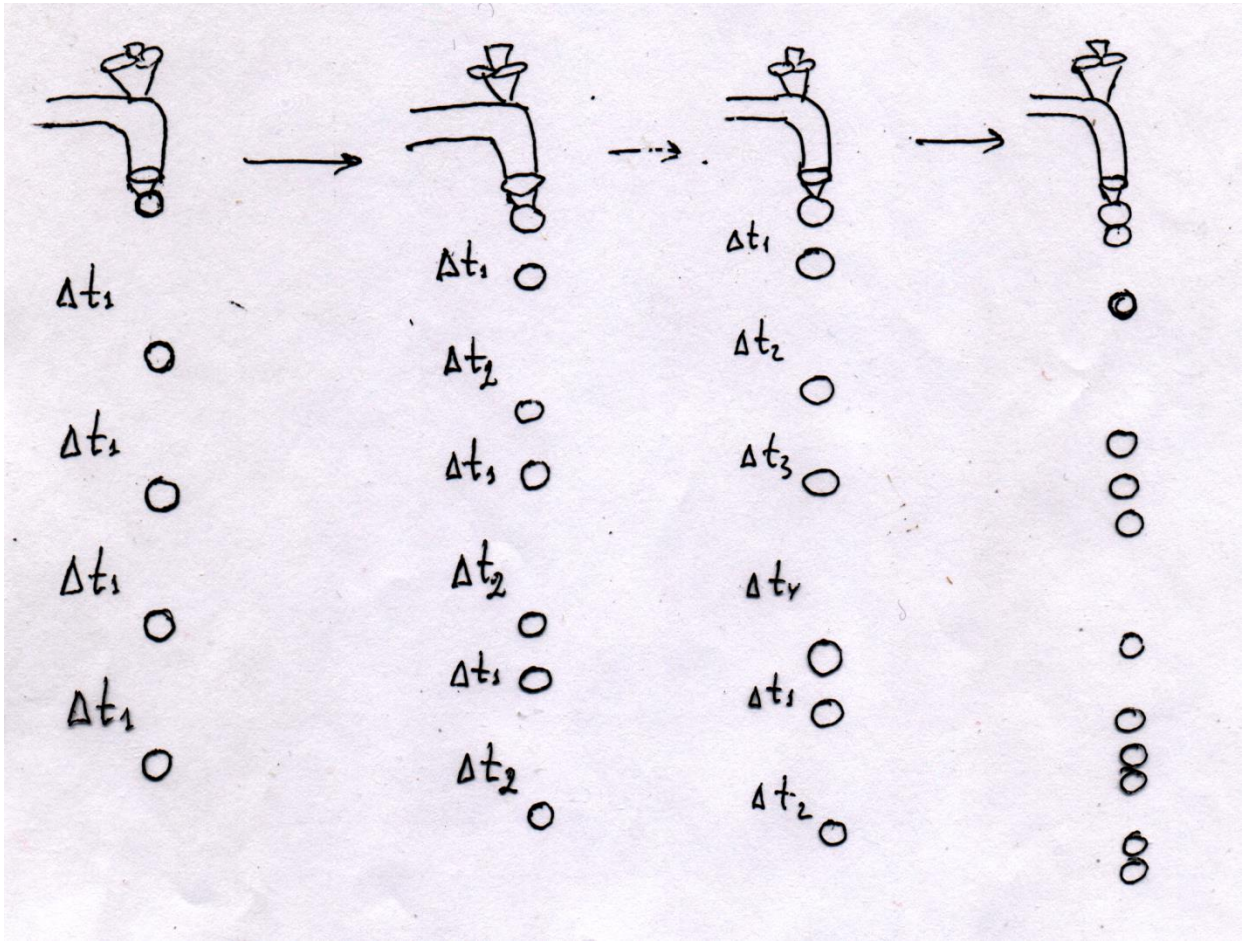


в Уравнение Ферхюльста

Бифуркационная диаграмма перехода к хаосу через удвоение периода

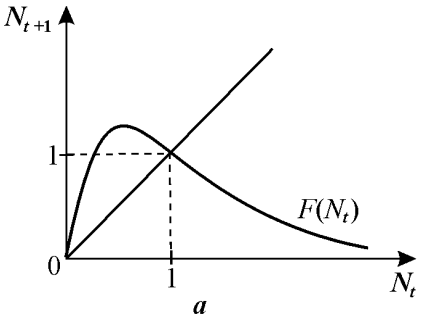


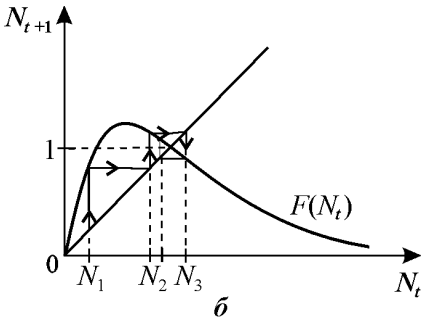
Переход к хаосу через удвоение периода

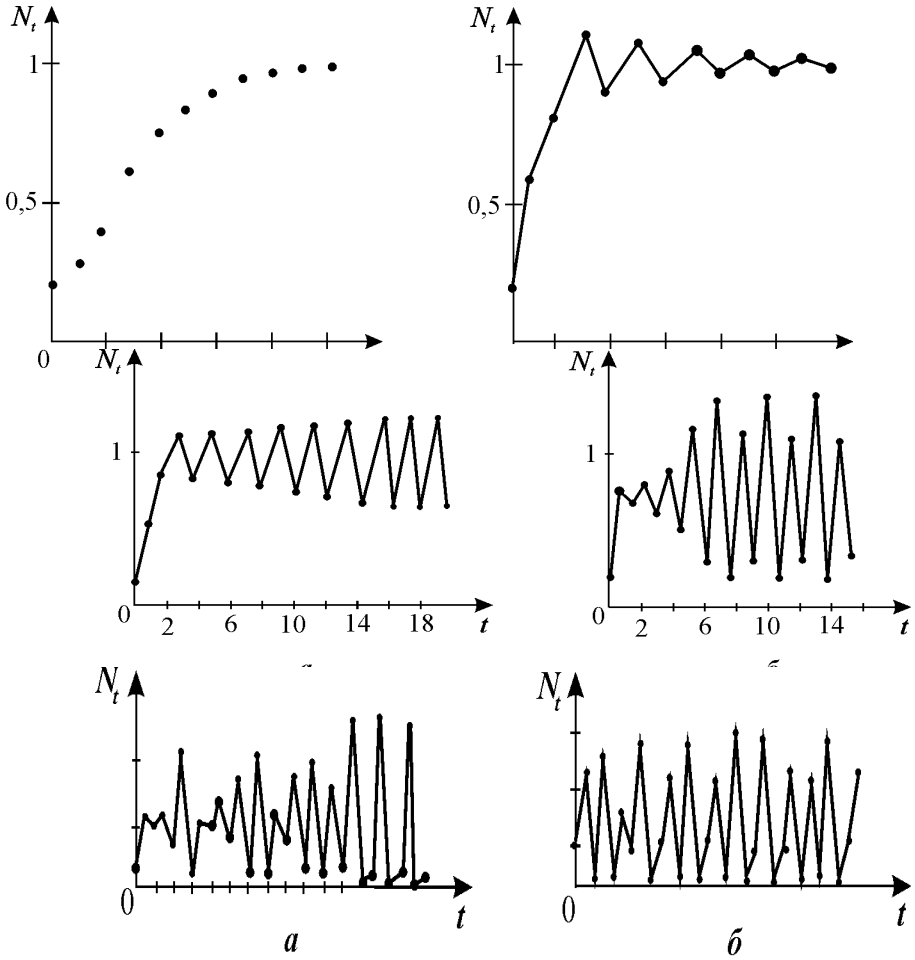


Дискретное логистическое уравнение

- Монотонный рост
- Колебания
- Детерминированный хаос



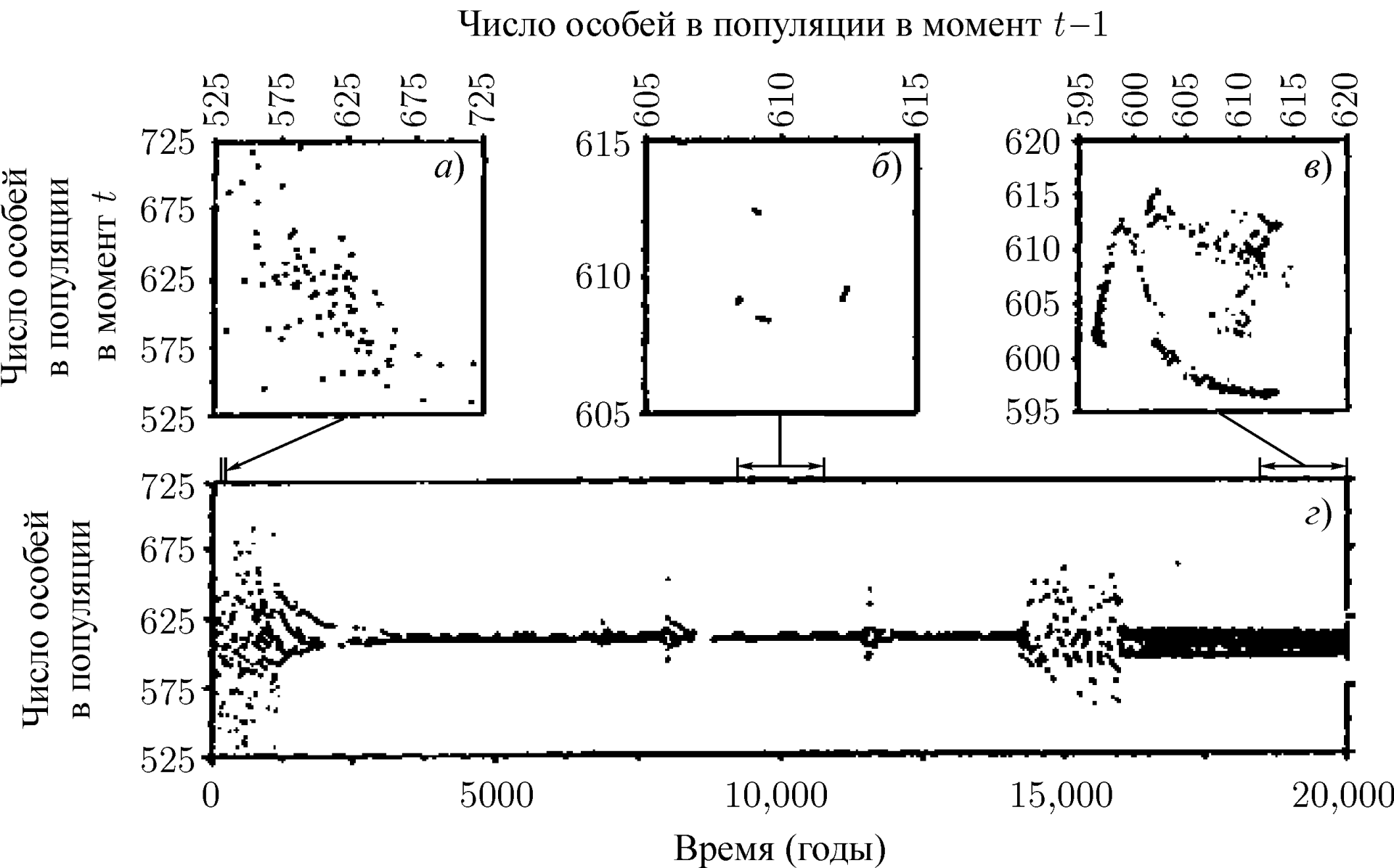




$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}$$

Модель динамики численности насекомых (при большом r – вспышки)

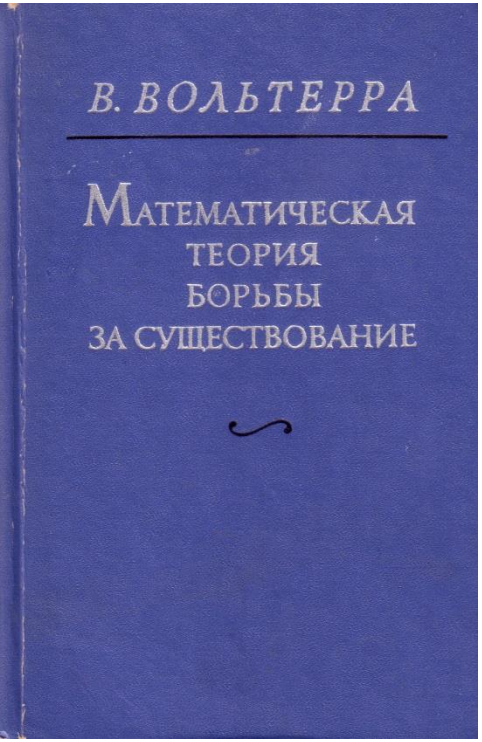
A.Hastings, K.Higgins. Persistence of transients in spatially structured ecological models Science, 1994, 263, 1133-1136.



Взаимодействие видов

File:Male Lion and Cub Chitwa South Africa Luca Galuzzi 2004.JPG

Vito Volterra. Lecons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie. Paris, 1931).



Русский перевод книги Вольтерра вышел в 1976 г. под названием:
«Математическая теория борьбы за существование»
М., Наука, 1976 Изд. РХД, 2004

Послесловие Ю.М. Свирежева,
в котором рассматривается история развития математической экологии в период 1931-1976 гг.

Классификация типов взаимодействий в терминах параметров уравнений

- N_1 – численность одного вида
- N_2 - численность другого вида

- a_i - коэффициенты собственной скорости роста видов,
- c_i - константы самоограничения численности (внутри видовой конкуренции)
- b_{ij} - константы взаимодействия видов, (i, j=1,2).

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1 + b_{12} N_1 N_2 - c_1 N_1^2,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = a_2 N_2 + b_{21} N_1 N_2 - c_2 N_2^2$$

ТИПЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИДОВ

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1 + b_{12} N_1 N_2 - c_1 N_1^2,$$

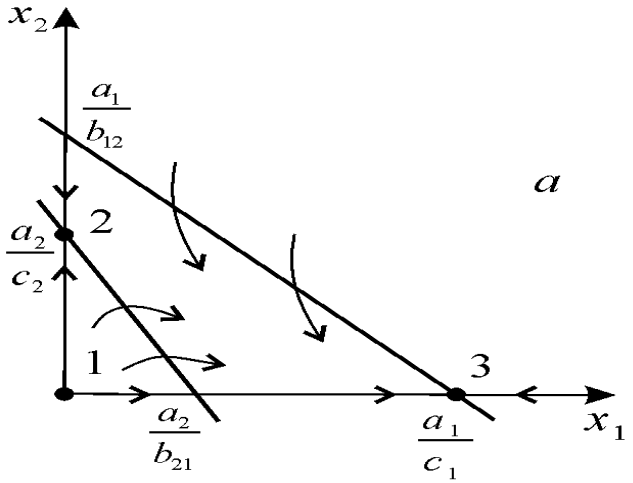
$$\frac{dN_2}{dt} = a_2 N_2 + b_{21} N_1 N_2 - c_2 N_2^2$$

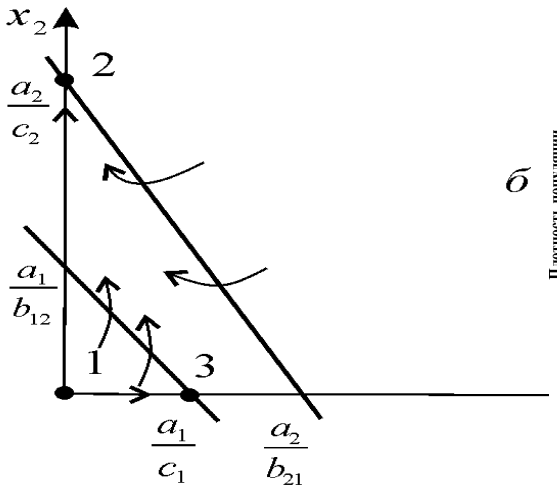
СИМБИОЗ	+	+	$b_{12}, b_{21} > 0$
КОММЕНСАЛИЗМ	+	0	$b_{12} > 0$, $b_{21} = 0$
ХИЩНИК-ЖЕРТВА	+	-	$b_{12}, > 0$, $b_{21} < 0$
АМЕНСАЛИЗМ	0	-	$b_{12}, = 0$, $b_{21} < 0$
КОНКУРЕНЦИЯ	-	-	b_{12}, $b_{21} < 0$
НЕЙТРАЛИЗМ	0	0	b_{12}, $b_{21} = 0$

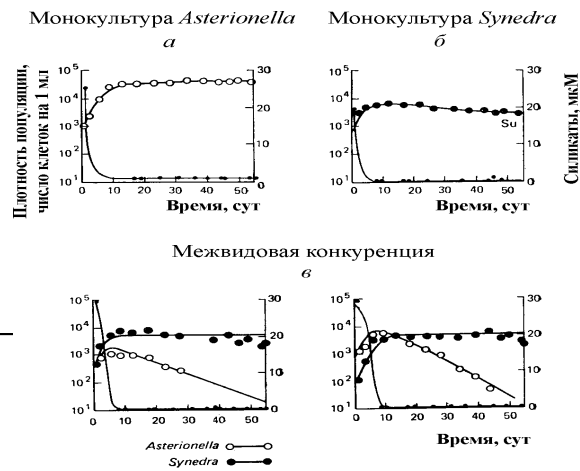
Уравнения КОНКУРЕНЦИИ

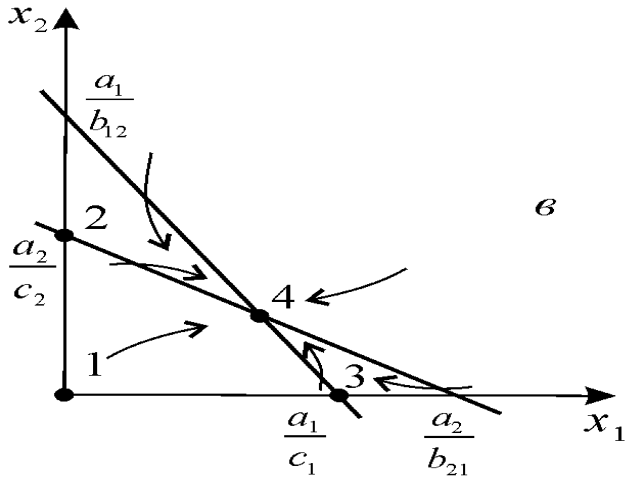
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(a_1 - b_{12}x_2 - c_1x_1),$$

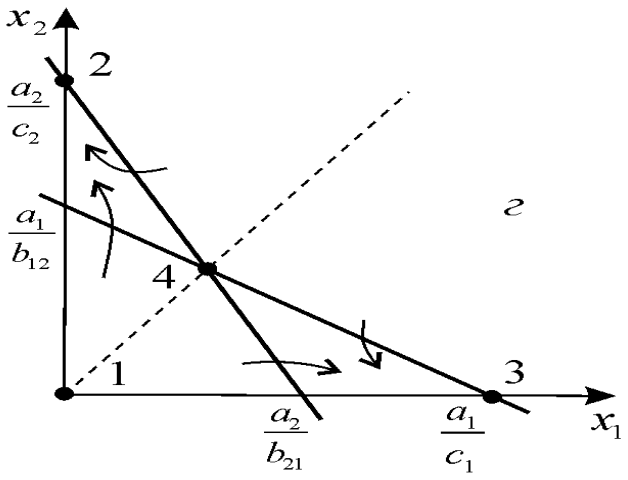
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(a_2 - b_{21}x_1 - c_2x_2)$$











Межвидовая конкуренция

Условие сосуществования видов

$$\frac{a_1 b_{12}}{c_2} < \frac{a_2 c_1}{b_{21}}$$

- a_i - коэффициенты собственной скорости роста видов,
- c_i - константы самоограничения численности (внутри видовой конкуренции)
- b_{ij} - константы взаимодействия видов, (i, j=1,2).

Если $a_1 = a_2$ $b_{12} b_{21} < c_1 c_2$,

Модель А.Н.Колмогорова (1935);

Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций. // Проблемы кибернетики. М., 1972, Вып.5.

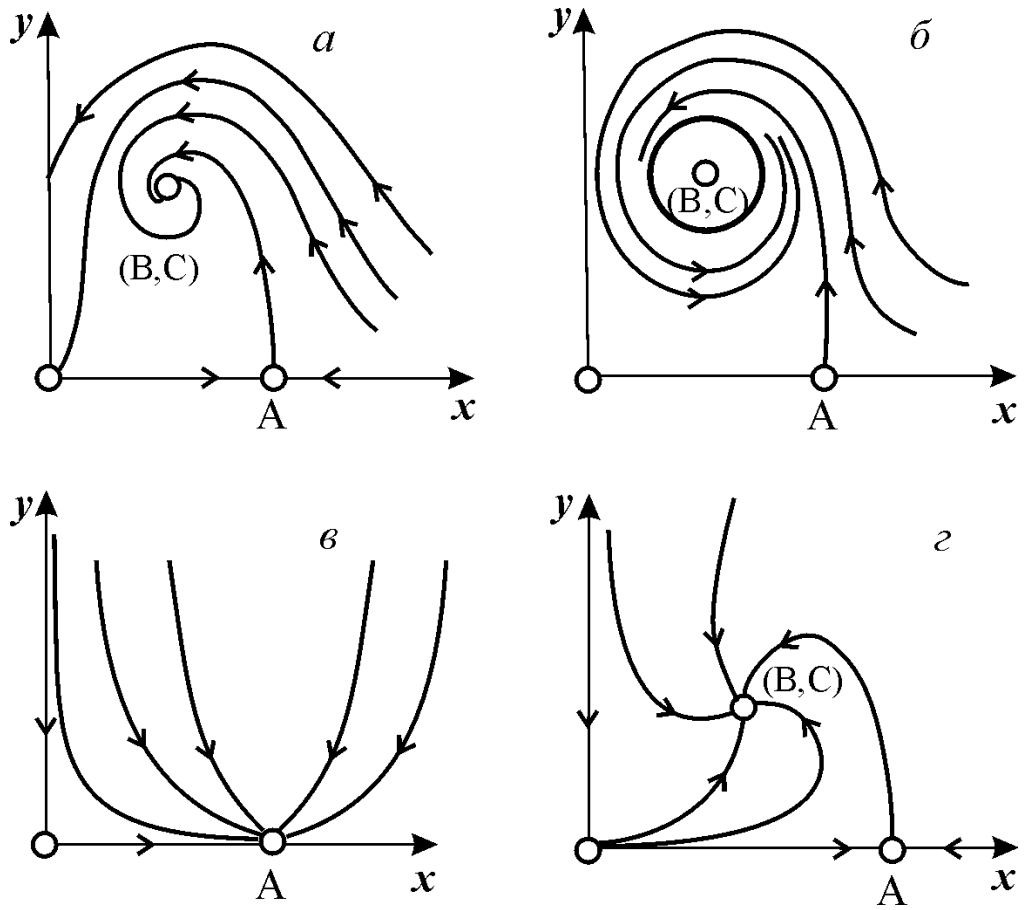
$$\frac{dx}{dt} = k_1(x)x - L(x)y,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2(x)y.$$

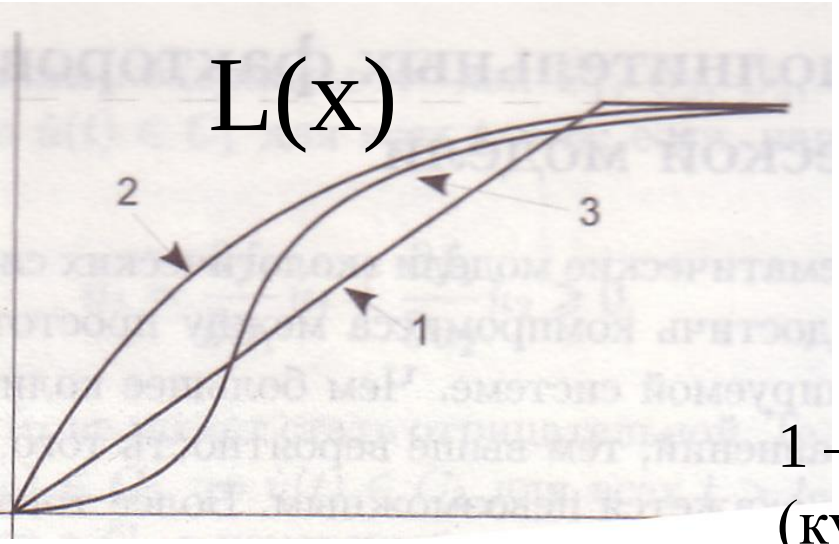
Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987)

великий советский математик, один из основоположников современной теории вероятностей. Им получены фундаментальные результаты в топологии, математической логике, теории турбулентности, теории сложности алгоритмов и ряде других областей математики и её приложений. Много сделал для математического образования и популяризации математики.

Фазовые портреты в модели Колмогорова



Функции хищничества Классификация Холлинга



$$\frac{dx}{dt} = k_1(x)x - L(x)y,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2(x)y.$$

1 – линейная функция (кусочно-линейная)

$$L(x) = b\left(1 - e^{-ax}\right)$$

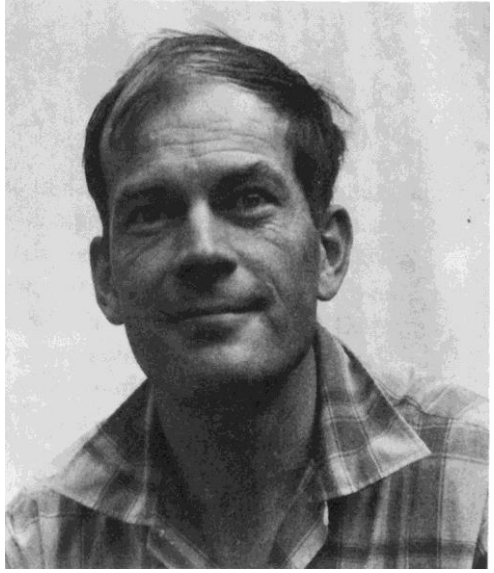
2 – насыщение хищника

$$L(x) = \frac{bx}{1+cx}$$

$$L(x) = \frac{bx^2}{1+ax+cx^2}$$

3-альтернативный источник питания или наличие убежищ жертв

Модель Розенцвейга-Макартура (1965)

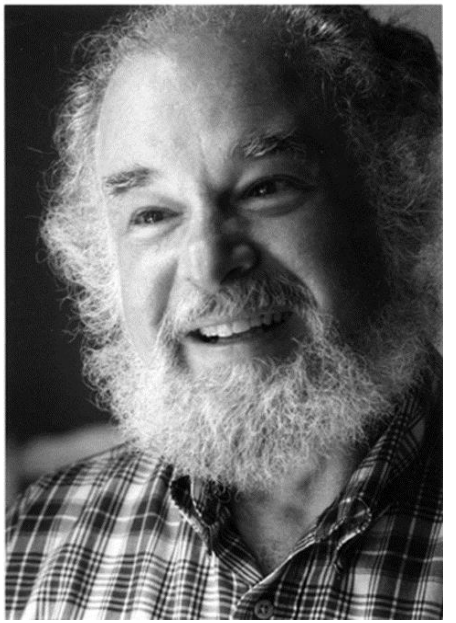


МакА́ртур Роберт (MacArthur Robert, 1930-1972)

Американский биолог, эколог. Работы по динамике популяций и разнообразию экологических сообществ

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - \Phi(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -ey + k\Phi(x, y),$$



Розенцве́йг Майкл Л. (Rosenzweig Michael L.)

Профессор. Университета Аризона, США основатель и главный редактор журнала “Evolutionary Ecology” (с 1986)

А.Д. Базыкин

Биофизика взаимодействующих популяций. М., Наука, 1985;
Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М., ИКИ, 2003
Nonlinear dynamics of interacting populations. World Scientific. 1998

Александр Дмитриевич Базыкин
1940-1954

Российский биолог и биофизик
Работы по динамике популяций

$$\frac{dx}{dt} = Ax - \frac{Bxy}{1+px} - Ex^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -Cy + \frac{Dxy}{1+px} - My^2.$$

Модель Базыкина в безразмерных переменных

$x \to (A/D)x;\ y \to (A/D)y; t \to (1/A)t;\ \gamma = c/A;$
$\alpha = PD/A;\ \varepsilon = E/D;\ \mu = M/B$

$$\frac{dx}{dt} = x - \frac{xy}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \frac{xy}{1+\alpha x} - \mu y^2$$

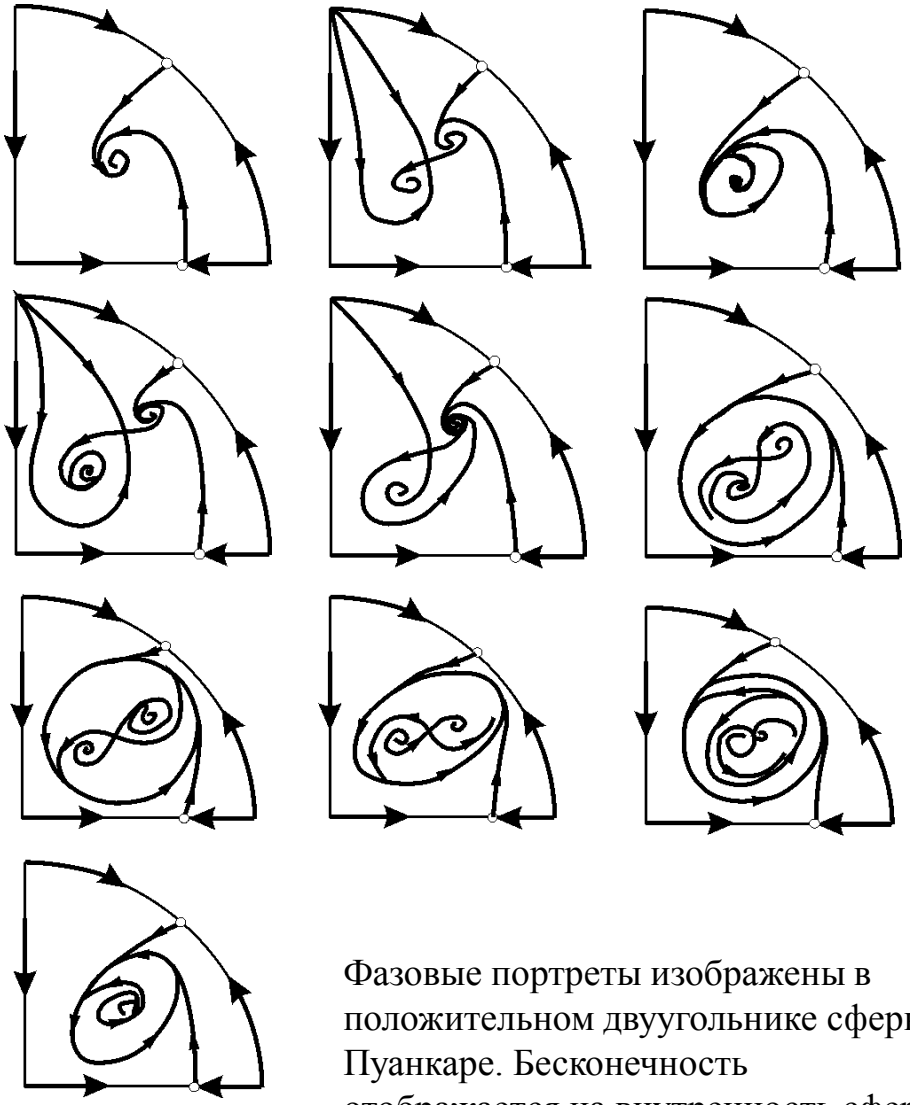
Модель Колмогорова

$$\frac{dx}{dt} = k_1(x)x - L(x)y,$$

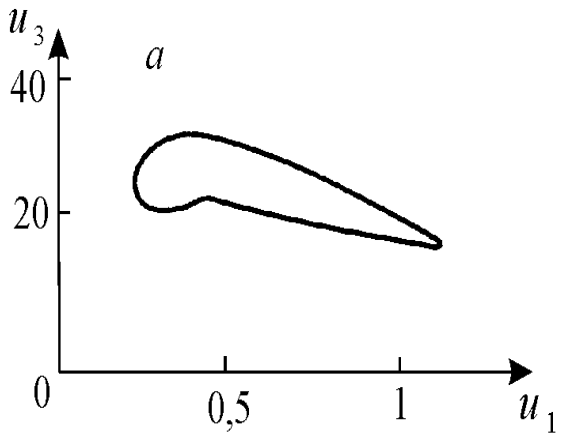
$$\frac{dy}{dt} = k_2(x)y.$$

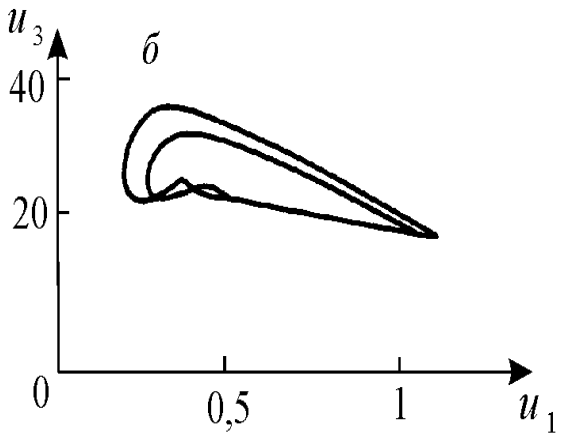
Набор фазовых портретов системы возможных в конечной части первого квадранта и соответствующих областям 1 - 10 параметрического портрета

(Базыкин, 1985)

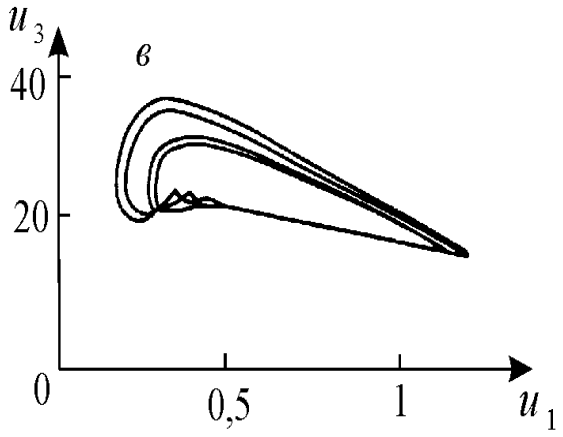


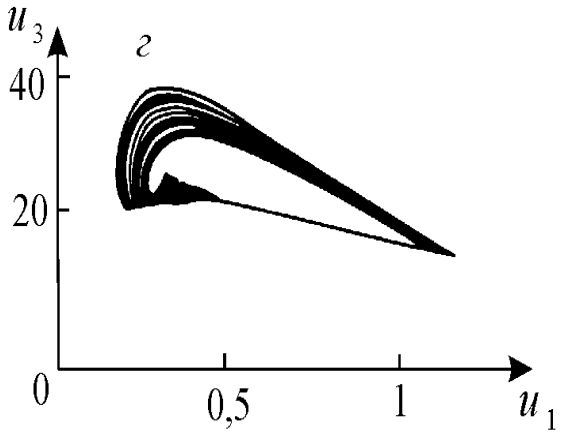
Фазовые портреты изображены в положительном двуугольнике сферы Пуанкаре. Бесконечность отображается на внутренность сферы конечного радиуса





Странный аттрактор в системе хищник – две жертвы





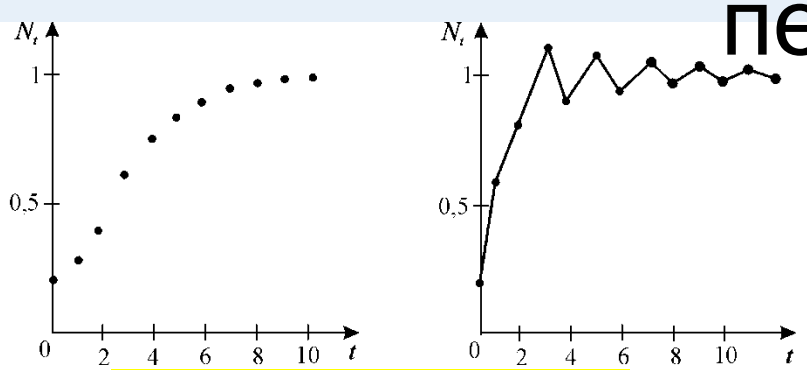
$$\frac{du_1}{dt} = u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4u_3),$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10u_3),$$

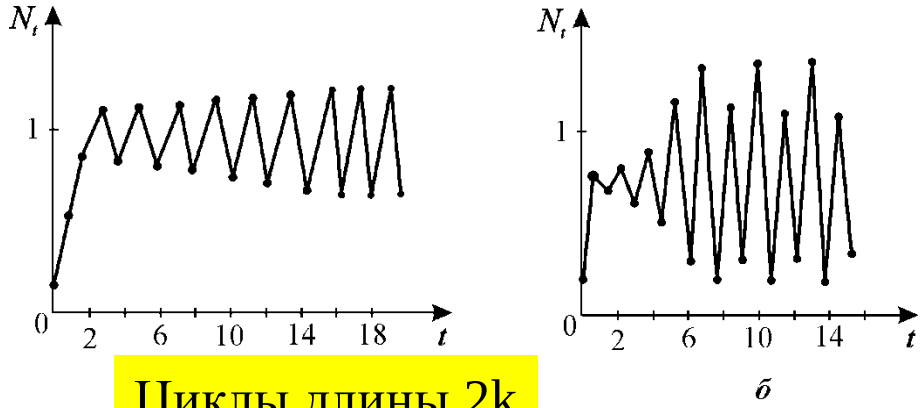
$$\frac{du_3}{dt} = u_3(-1 + 0.25u_1 + 4u_2 - u_3).$$

Система, описывающая взаимодействие трех видов: хищник - две жертвы (А.Д. Базыкин, Е.Апонина, Ю.Апонин, 1985). При уменьшении параметра скорости роста первой жертвы происходит усложнение траектории (последовательное удвоение предельного цикла) *а – г*. Колебательная динамика переходит в квазистохастическую

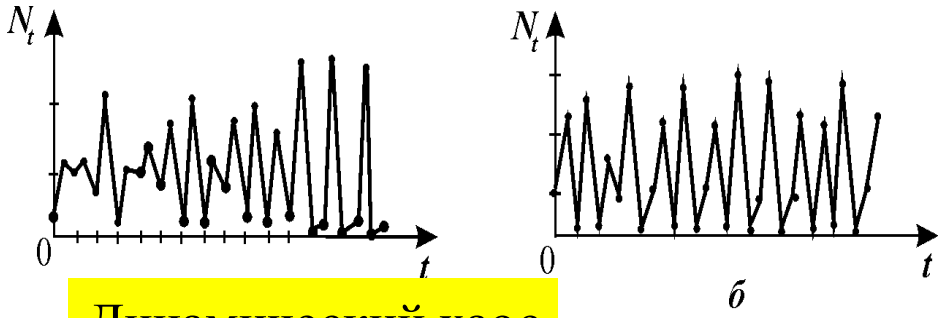
Переход к хаосу через удвоение периода



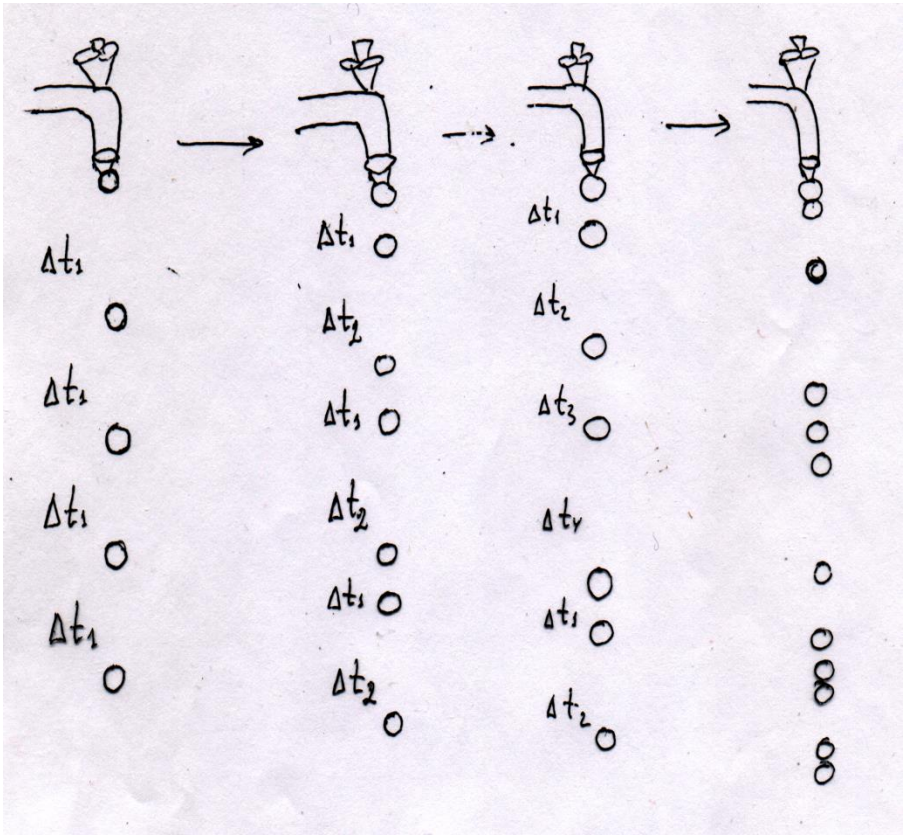
Устойчивое решение



Циклы длины 2k



Динамический хаос



$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}$$

Модели замкнутых экосистем

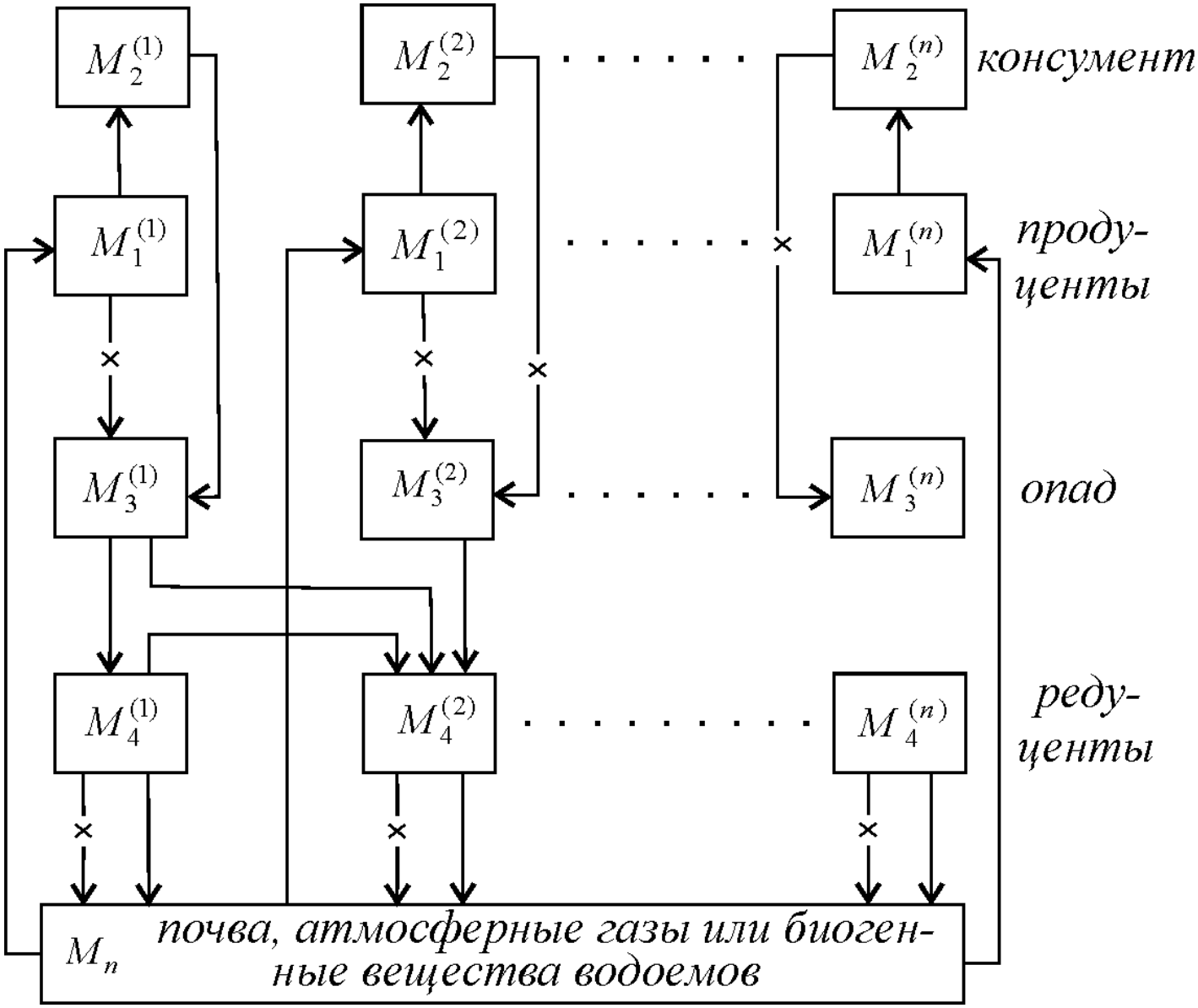
В.В.Алексеев, Крышев И.И., Сазыкина Т.Г.

Физическое и математическое моделирование экосистем

Вячеслав Викторович Алексеев (1940-2007)

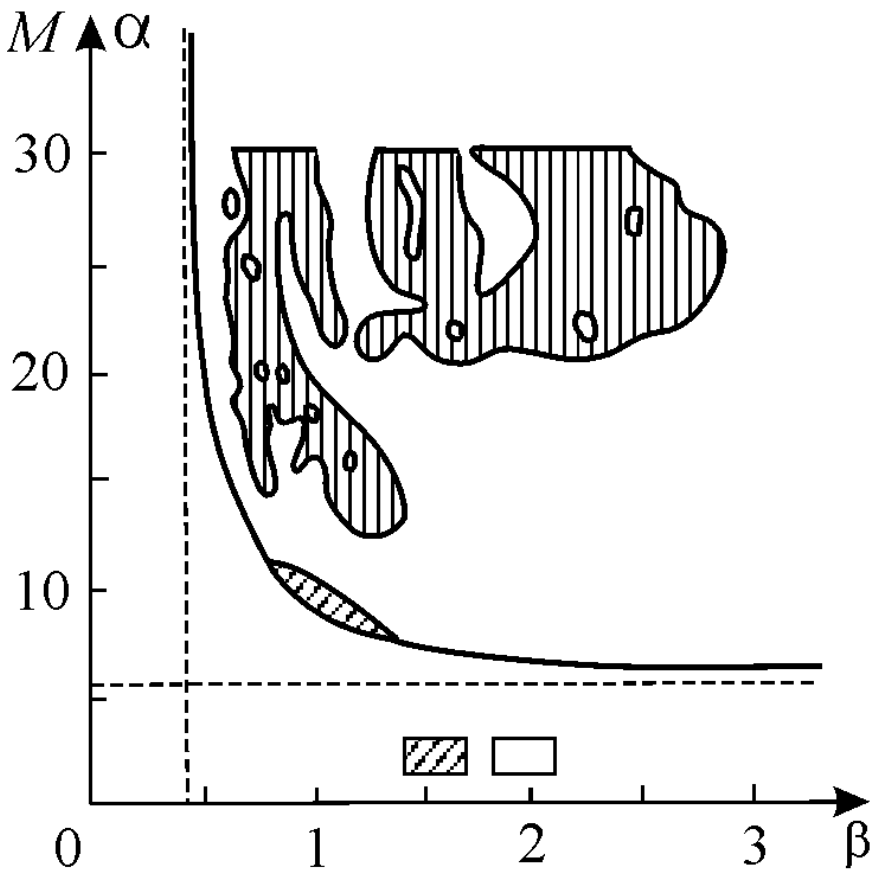
Физик, эколог, геофизик. Динамика процессов в замкнутых экосистемах. Возобновляемые источники энергии

Схема потоков вещества по трофическим пирамидам в замкнутой экосистеме



$$\sum_{i,k} M_i^k + M_{П} = M$$

Области стохастичности (штриховка) для системы два хищника – две жертвы



Александр Юрьевич Лоскутов
(1960 – 2011)

В.В.Алексеев, А.Ю.Лоскутов. О возможности управления системы со странным аттрактором. Проблемы экологического мониторинга, 1985

Ма́лхов Хорст (Malchow Horst) – немецкий ученый, профессор, университета Оснабрюкке. Декан факультета сложных систем

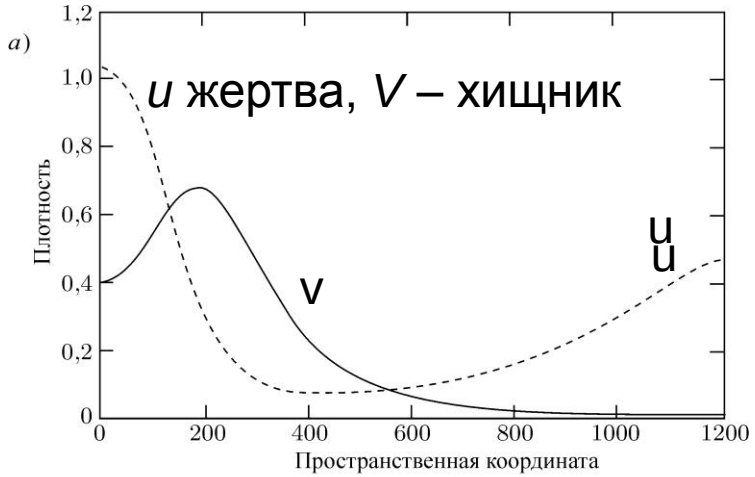
Колебания и пространственный хаос

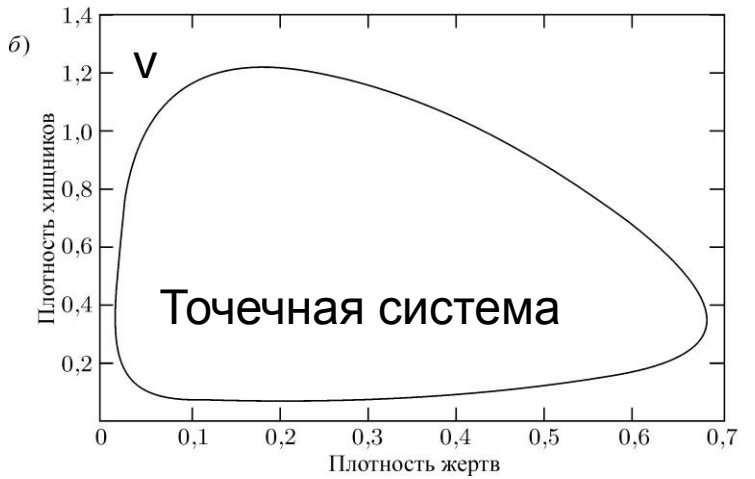
Подвижности видов (коэффициенты диффузии) одинаковы (не Тьюринг)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) - \frac{u}{u+H}v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\frac{u}{u+H}v - mv,$$

Зададим малые возмущения

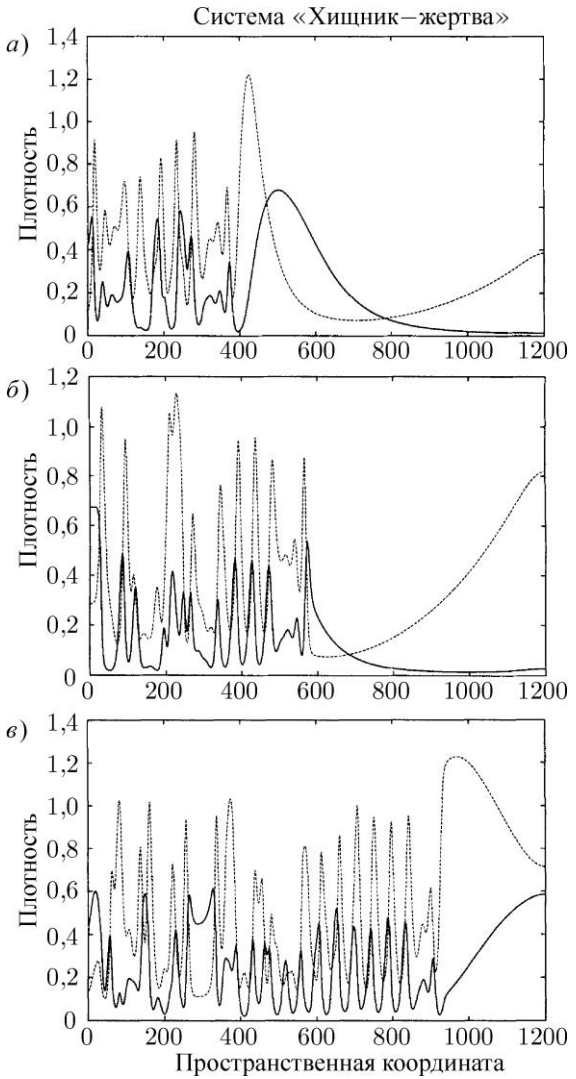




u

Malchow H., Petrovskii S.V., Venturino E. Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: Theory, models, simulations. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2008

Малые возмущения динамической системы в пространстве дают динамический хаос



$$u(x,t) = u_3,$$

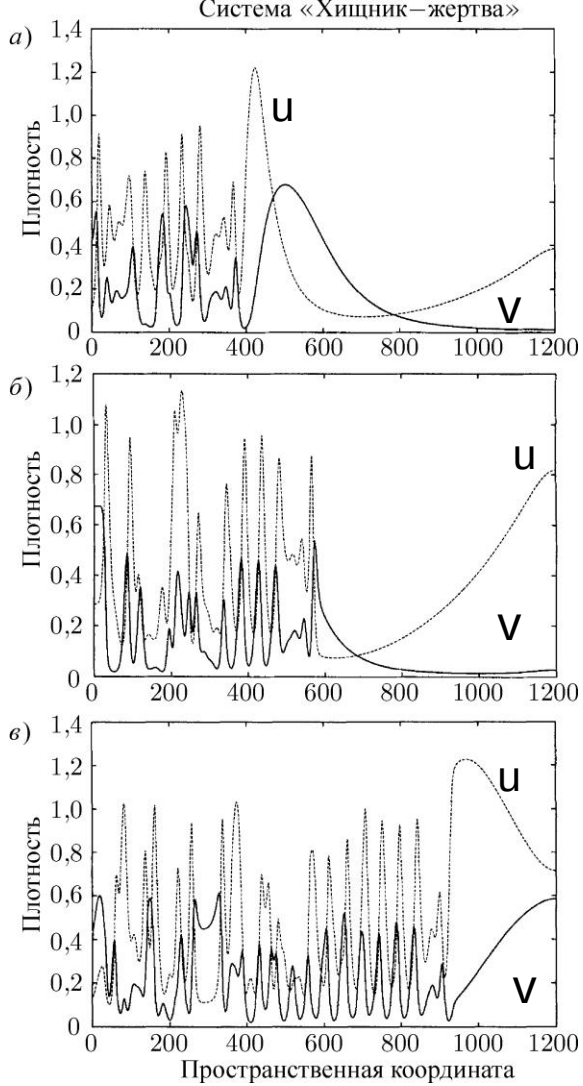
$$v(x,0) = v_3 + \left[\varepsilon(x - x_0) + \delta\right].$$

$$\delta = 0{,}01,\ \varepsilon = 0{,}0004,\ x_0 = 0$$

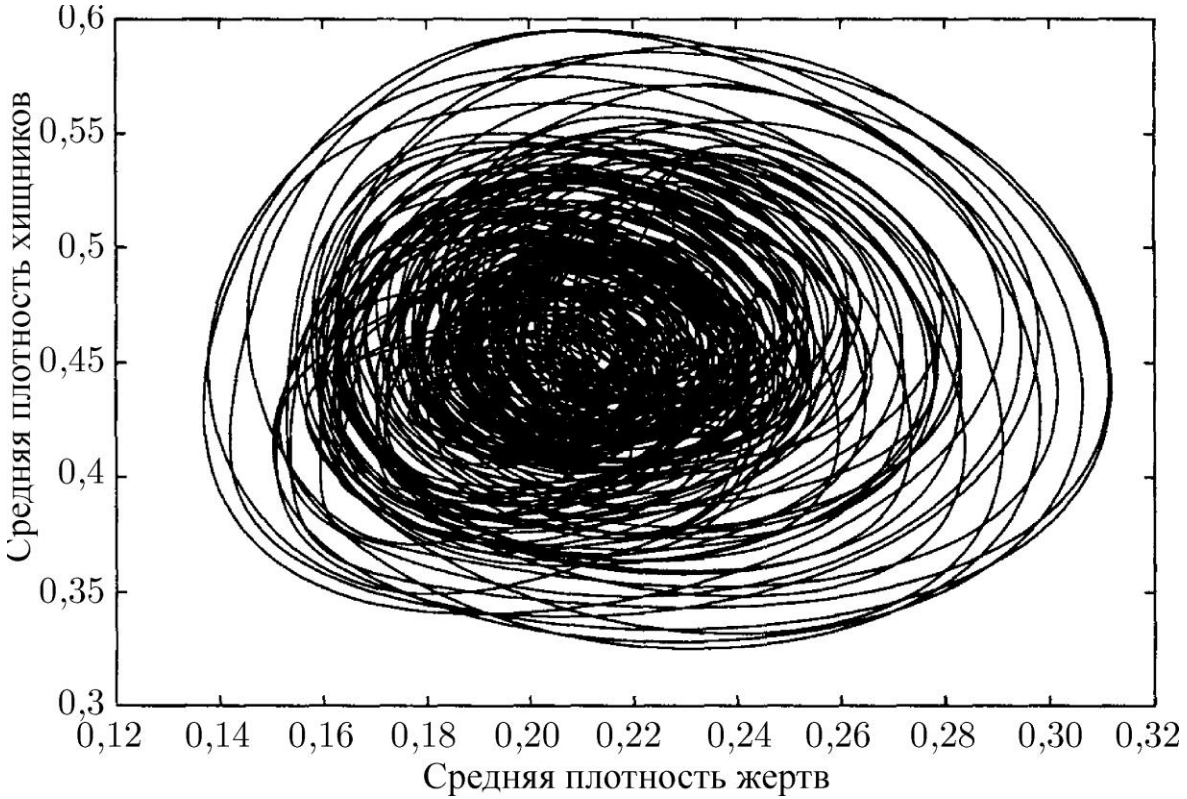
а – t =500, б – t =1000, в – t = 2000

Petrovskii S.V. and Malchow H. A minimal model of pattern formation in prey-predator system. *Math. Comput. Modelling* **29**: 49-63, 1999

Пространственный хаос



Фазовый портрет в точке x=480 после того, Как хаотическое поведение охватило весь ареал



а – *t* =500, б – *t* =1000, в – *t* = 2000

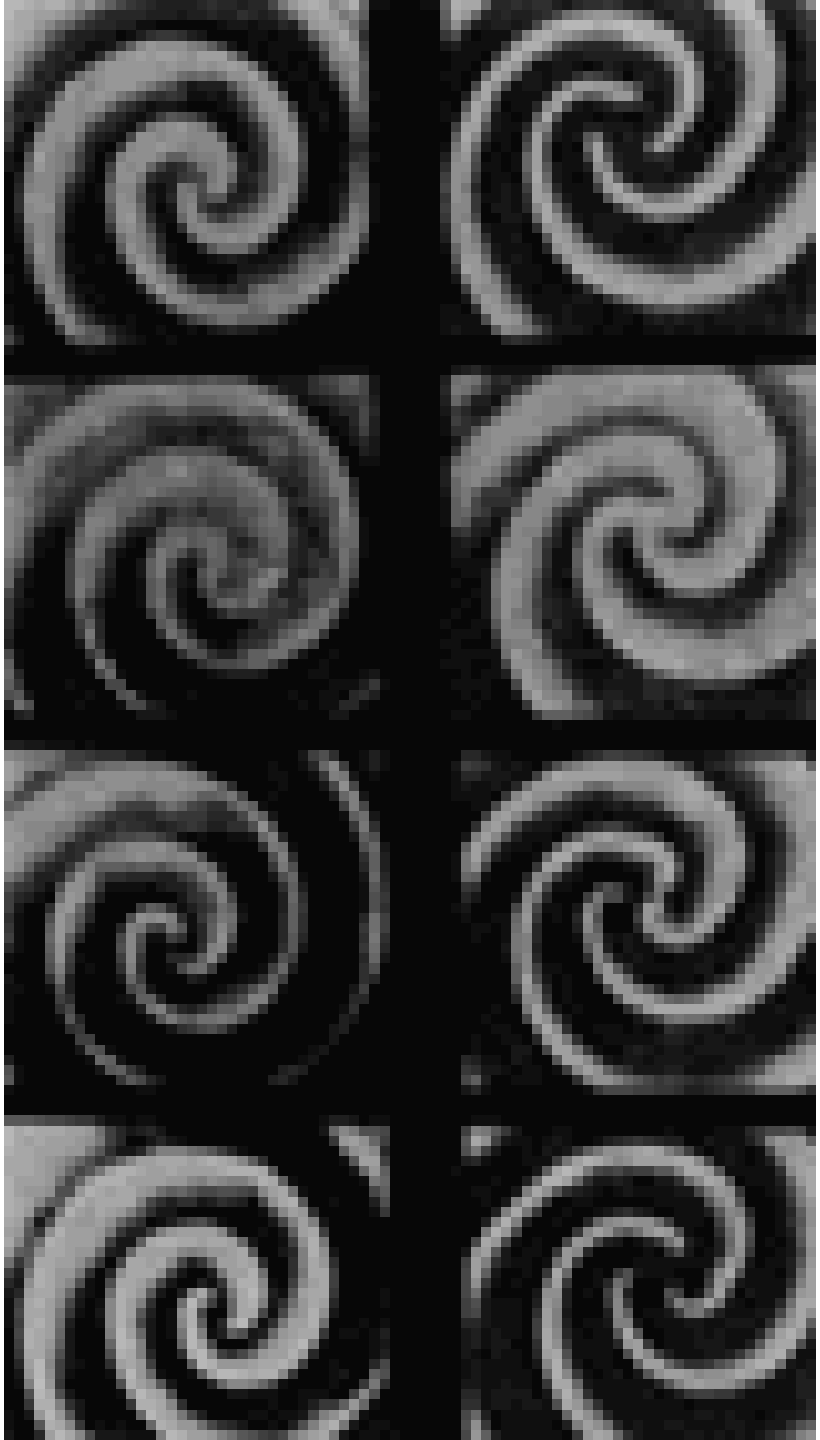
В распределенной системе процессы переноса приводят к хаотизации поведения всей системы

В

Подавление хаоса и управление хаосом

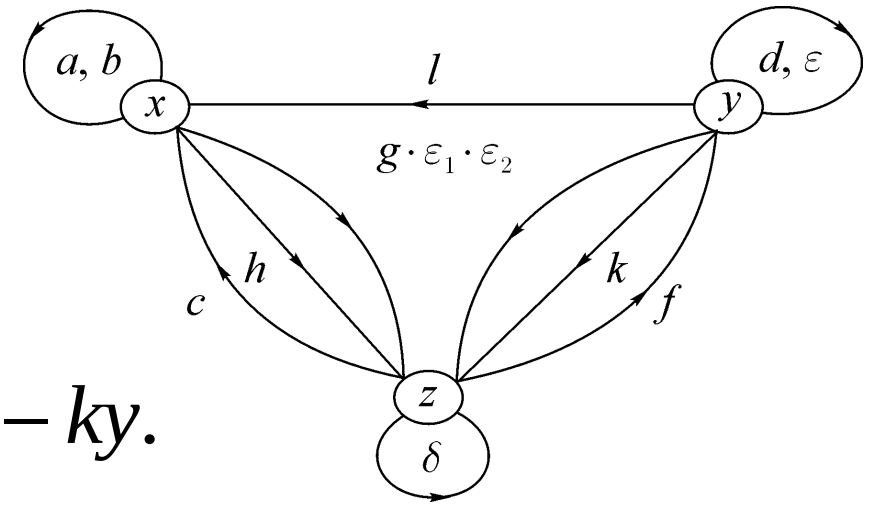
А.Ю.Лоскутов,
А.С.Михайлов.
Основы теории сложных систем

ИКИ-РХД, 2007



Модель Ю.И.Неймарка

производители управленцы



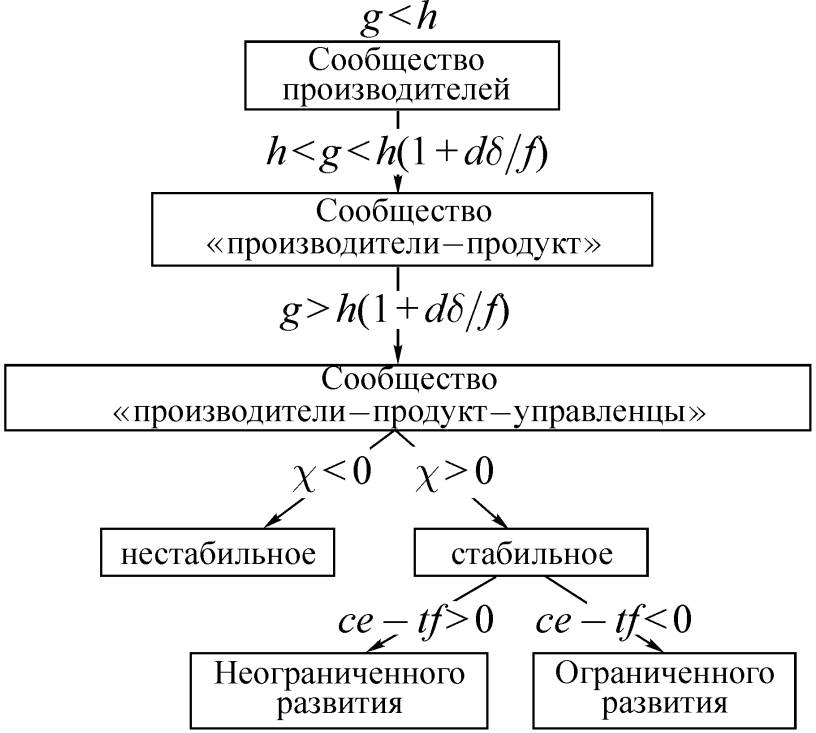
Продукт

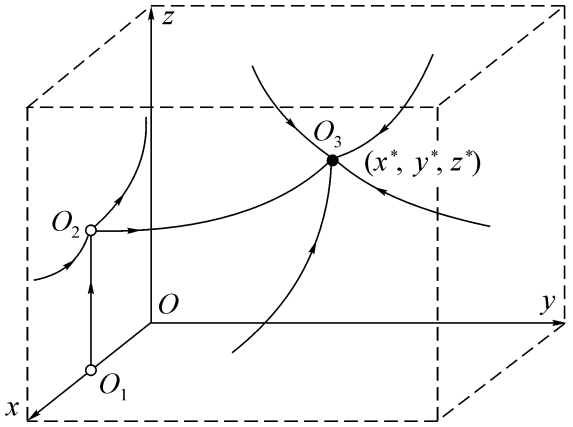
$$F = g\left(\frac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y}\right)\left(\frac{x}{1+\delta z}\right) - hx - ky.$$

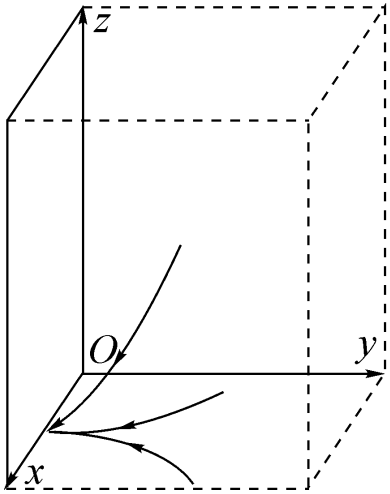
$$\frac{dx}{dt} = (a - bx - ly + cz)x, \quad \frac{dy}{dt} = (-d - ey + fz)y,$$

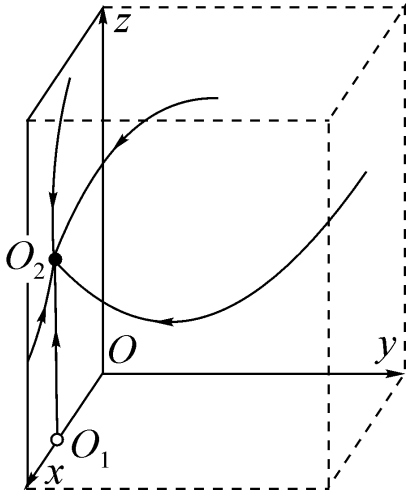
$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} F, & z \geq 0,\ F > 0, \\ 0, & z = 0,\ F < 0, \end{cases}$$

Типы общества



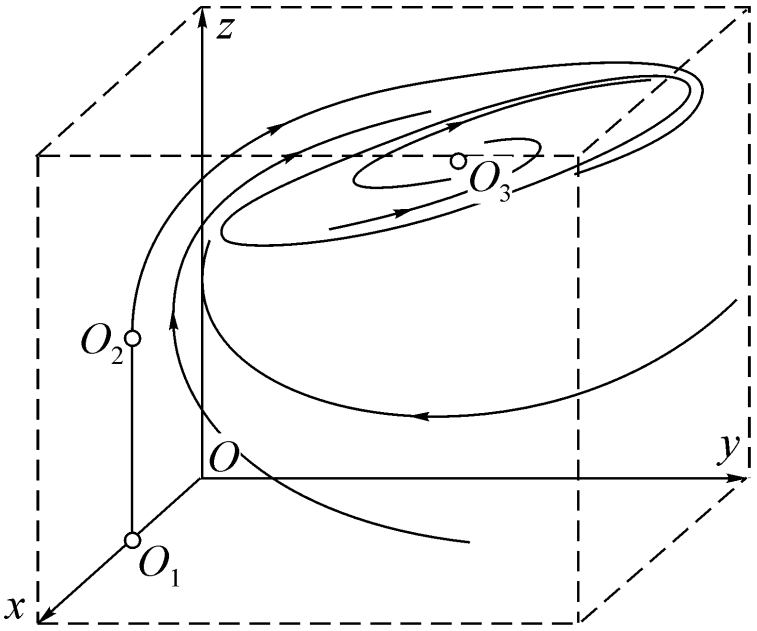


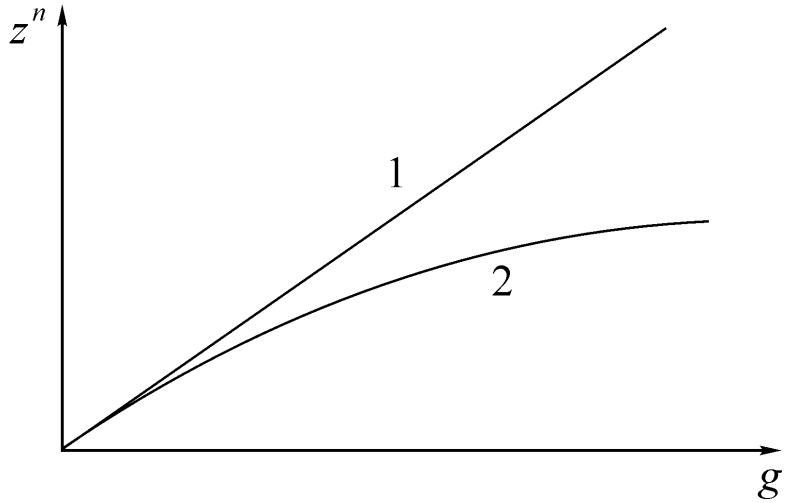




Накопленный продукт

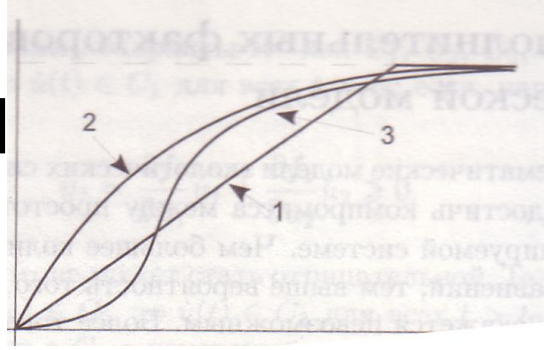
Нестабильное общество с высоким уровнем развития





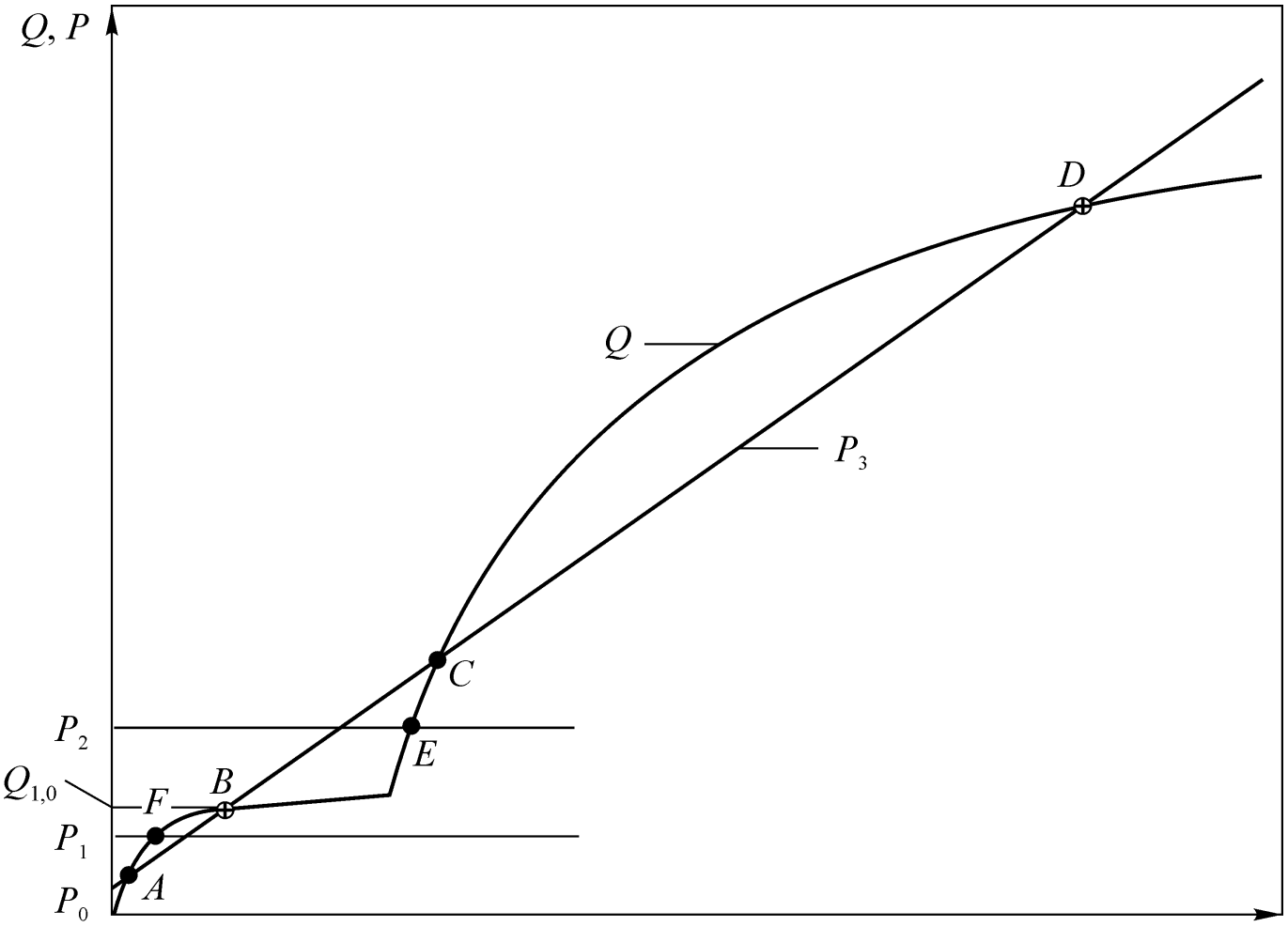
Накопленный продукт общества

Функция потреблен (Чернавский)



Функция Хищничества Холлинга

$$L(x) = \frac{bx^2}{1 + ax + cx^2}$$



P – доход
Q – спрос

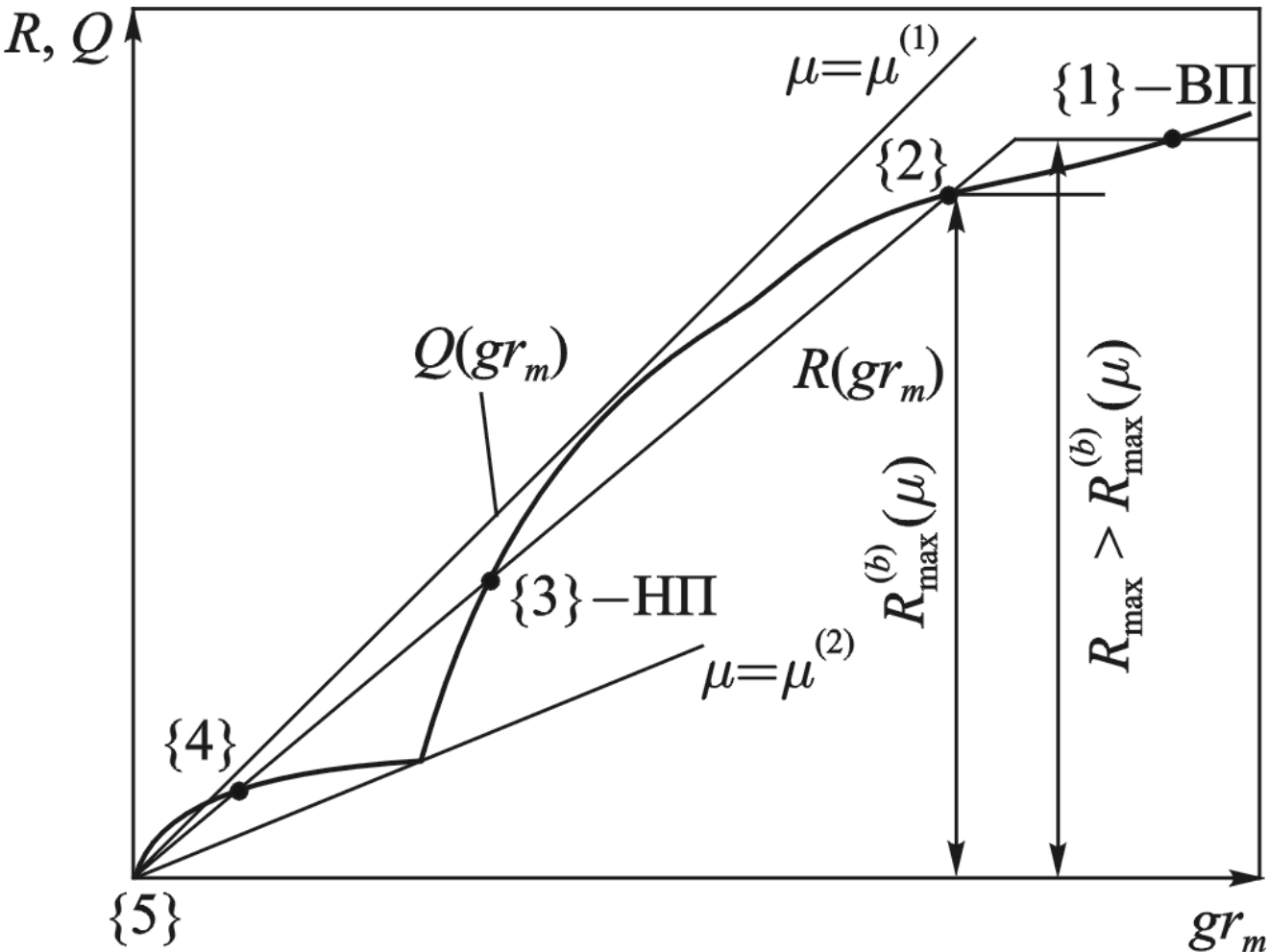
U – накопления в условных единицах

Модель экономики России.

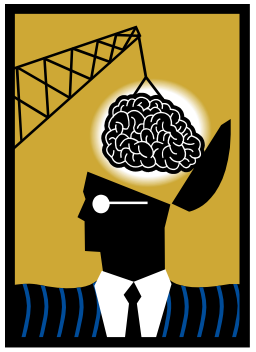
9 групп населения с разной структурой доходов
Распределение элиты по доходам и затратам

Чернавский Д. С., Старков Н. И., Малков С. Ю., Коссе Ю. В., Щербаков А. В.

Об эконофизике и ее месте в современной теоретической экономике // УФН, 2011. – Т. 181. – С. 767–773



Операционная система мозга
Законы природы



- Природа (общество) – тоже операционная система. Её удается представить с той или иной полнотой в виде разнообразных элементов и связей между ними и текущим временем.
- Это представление и называется «**законами природы (общества)**».

- Когда удается построить изоморфную объекту природы математическую модель, мы постигаем и природный объект

«Все может надоесть, кроме понимания»
Вергилий

Бюст Вергилия у входа в его склеп в Неаполе
Имя при рождении:
Публий Вергилий Марон
Дата рождения:
15 октября 70 до н. э.
Место рождения: Мантуи
Дата смерти:
21 сентября 19 до н.э.
Род деятельности:
древнеримский поэт

www.biophys.msu.ru

Кафедра биофизики Биологического ф-та МГУ

Галина Юрьевна РИЗНИЧЕНКО

Спасибо за внимание

2014