ГОРОД КАК СЛОЖНАЯ СЕТЬ

ЕВИН ИГОРЬ АЛЕКСЕЕВИЧ

МФТИ

Кафедра вычислительных моделей
технологических процессов

СОДЕРЖАНИЕ

- 1. Теория шести рукопожатий
- 2. Сложные системы и «тесный мир»
- 3. Теория графов
- 4. Безмасштабные сети: метро
- 5. Дорожные сети городов
- 6. Литература

МНОГИЕ СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ МОЖНО ПРЕДСТАВИТ В ВИДЕ СЕТЕЙ

Элементы сетей – узлы

Взаимосвязи между элементами –
связи между узлами

ТЕОРИЯ ГРАФОВ –
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОСНОВА
ТЕОРИИ СЛОЖНЫХ СЕТЕЙ

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР
17

*Euler L. Solutio
problematis ad
geometriam situs
pertinentis //
Commentarii
academiae
scientiarum
Petropolitanae 8,
1741, pp. 128–140.*

МОСТЫ КЕНИКСБЕРГА

впервые часть городской территории изобразил в виде графа

*Frigyes Karinthy (1887-1938)
Hungarian Writer*

1929: *Minden máskeppen van* (Everything is Different)
Láncszemek (Chains)

“Look, Selma Lagerlöf just won the Nobel Prize for Literature, thus she is bound to know King Gustav of Sweden, after all he is the one who handed her the Prize, as required by tradition. King Gustav, to be sure, is a passionate tennis player, who always participates in international tournaments. He is known to have played Mr. Kehrling, whom he must therefore know for sure, and as it happens I myself know Mr. Kehrling quite well.”

"The worker knows the manager in the shop, who knows Ford; Ford is on friendly terms with the general director of Hearst Publications, who last year became good friends with Arpad Pasztor, someone I not only know, but to the best of my knowledge a good friend of mine. So I could easily ask him to send a telegram via the general director telling Ford that he should talk to the manager and have the worker in the shop quickly hammer together a car for me, as I happen to need one."

**Stanley Milgram
(1933-1984)**

Milgram, S., The
small world
problem,
Psychology Today
2, 60–67 (1967).

Milgram's Six Degrees

The first chain letters

The destination: Boston, Massachusetts

Starting Points: Omaha, Nebraska & Wichita, Kansas

SIX DEGREES

"Everybody on this planet is separated by only six other people. Six degrees of separation. Between us and everybody else on this planet. The president of the United States. A gondolier in Venice.... It's not just the big names. It's anyone. A native in a rain forest. A Tierra del Fuegan. An Eskimo. I am bound to everyone on this planet by a trail of six people. It's a profound thought. How every person is a new door, opening up into other worlds."

Six Degrees of Separation

- Movie
- “SIX DEGREES OF SEPARATION”
- Героиня этого фильма говорит:
- Я где-то читала, что каждый на нашей планете отделен от другого человека только шестью людьми. Шесть ступеней отделения... Между нами и любым другим на планете. Президентом Соединенных Штатов. Гондольером в Венеции.Не обязательно известные имена. *С любым.* Можно найти ровно шесть людей, чтобы установить связь. Туземцем в джунглях. Эскимосом. ...Каждая персона как новая дверь, распахнутая в остальной мир.

D.J. Watts and S.H. Strogatz, Nature (London) **393**, 440,
1998

Steven Strogatz

Duncan Watts

Barabasi, A.-L. and Albert, R., Emergence of scaling in random networks, Science 286, 509–512 (1999).

Laszlo Barabasi

Reka Albert

Bell Curve

Power Law Distribution

Complex network structure of musical compositions: Algorithmic generation of appealing music

Xiao Fan Liu*, Chi K. Tse, Michael Small

X.F. Liu et al. / Physica A 389 (2010) 126–132

NETWORK SCIENCE is the part of
statistical physics

International Conferences on
statistical physics

УРБАНИЗАЦИЯ

- Первые города возникли более 5000 лет назад и именно в них возникли и стали развиваться наука и технологии, определившие все дальнейшее развитие человечества. Доля городских жителей уже достигла 50% от всей численности населения Земли и продолжает увеличиваться. Каждую неделю население всех городов мира увеличивается приблизительно на один миллион человек, а суммарная площадь этих городов к 2030 году превысит площадь Франции, Германии и Испании вместе взятых.

ОБЩЕСТВЕННЫЙ ТРАНСПОРТ МОСКВЫ КАК СЛОЖНАЯ МНОГОСЛОЙНАЯ СЕТЬ

Московское метро в 1935 году

1973 год

Betweenness Centrality – нагрузка узла

- Betweenness centrality measures the extent to which a vertex lies on path between other vertices.

Загруженность актера

- Например, загруженность актера i в сети актеров (между двумя актерами кино имеется связь, если они снялись в одном фильме) определяется как суммарное число кратчайших путей между всеми остальными актерами (узлами), которые проходят через актера (узел) i :

$$B(i) = \sum_{st} \sigma_{st}(i) / \sigma_{st},$$

где $\sigma_{st}(i)$ – число кратчайших путей из узла s в узел t через узел i и σ_{st} – общее число кратчайших путей между всеми парами s и t .

Станции московского метро

№	Станция	Betweenness centrality
1	Киевская	2919.18
2	Октябрьская	2678.03
3	Курская/Чкаловская	2647.69
4	Баррикадная/Краснопресненская	2420.67
5	Таганская/Марксистская	2382.95
6	Парк Культуры	2166.47
7	Третьяковская/Новокузнецкая	1956.88
8	Павелецкая	1823.54
9	Менделеевская/Новослободская	1722.70
10	Охотный ряд/Театральная/Площадь Революции	1607.79

Наиболее важные станции московского метро по критерию **betweenness centralit (загруженность)**

№	Станция	Betweenness centrality
1	Киевская	3068,15
2	Октябрьская	2948,08
3	Курская/Чкаловская	2903,42
4	Таганская/Марксистская	2668,96
5	Баррикадная/Краснопресненская	2510,02
6	Парк Культуры	2359,48
7	Павелецкая	2127,92
8	Третьяковская/Новокузнецкая	2120,51

График изменения загруженности (betweenness centrality) для кольцевой станции «Белорусская» в процессе развития московского метрополитена

График изменения загруженности всех станций кольцевой линии московского метрополитена

График зависимости числа станций московского метрополитена от значения их загруженности (betweenness centrality)

Ассортативность r в таблице 2 служит мерой тенденции узлов сети оказаться соединенными с другими узлами с одним и тем же числом связей. Его можно определить как коэффициент Пирса:

$$r = \frac{L \sum_{i=1}^L j_i k_i - \left[\sum_{i=1}^L j_i \right]^2}{L \sum_{i=1}^L j_i^2 - \left[\sum_{i=1}^L j_i \right]^2}.$$

Здесь L – число связей в сети, а j_i и k_i – число связей у узлов на обоих концах связи i . Если узлы с большим числом связей (хабы) связаны друг с другом, то $r \approx 1$. Если узлы с большим числом связей связаны с узлами с небольшим числом связей, то $r \approx -1$.

MULTIPOINT DEGREE CORRELATIONS

$P(k)$: not enough to characterize a network

Large degree nodes tend to connect to large degree nodes
Ex: social networks

Large degree nodes tend to connect to small degree nodes
Ex: technological networks

DEGREE CORRELATIONS IN NETWORKS

Assortative:

hubs show a tendency to link to each other.

Neutral:

nodes connect to each other with the expected random probabilities.

Disassortative:

Hubs tend to avoid linking to each other.

Quantifying degree correlations (three approaches):

- full statistical description (Maslov and Sneppen, Science 2001)
- degree correlation function (Pastor Satorras and Vespignani, PRL 2001)
- correlation coefficient (Newman, PRL 2002)

АССОРТАТИВНОСТЬ

Таблица 1. Ассортативность социальных, технологических и биологических сетей.
Адаптировано из [Newman, 2003]

Тип сети	Сеть	Размер сети	Ассортативность r
Социальные	соавторов по физике	52 909	0,363
	соавторов по биологии	1 520 251	0,127
	соавторов по математике	253 339	0,120
	сотрудничества актеров кино	449 913	0,208
	директоров компаний	7 673	0,276
	адресов электронной почты	16 881	0,092
Технологические	сеть электростанций	4 941	-0,003
	Интернет	10 697	-0,189
	«всемирная паутина» (WWW)	269 504	-0,067
Биологические	взаимодействий белков	2 115	-0,156
	метаболическая сеть	765	-0,240
	нейронная сеть	307	-0,226
	морская пищевая сеть	134	-0,263
	пресноводная пищевая сеть	92	-0,326
	сеть сообщества дельфинов	62	-0,044

Сеть метро Петербурга также имеет положительную ассортативность

СЕТЬ АВТОБУСНЫХ МАРШРУТОВ МОСКВЫ

Автобусная сеть Москвы

Автобусная сеть Москвы

Сеть автобусных маршрутов Петербурга также имеет положительную ассортативность

Сеть общественного транспорта Петербурга

*. Крупным узлам соответствуют маршруты с высоким показателем *betweenness centrality*, у малых узлов это значение мало. Раскраска графа соответствует делению транспортной сети на сообщества. Структура сообществ отражает административно-территориальное деление города.*

МОНОЦЕНТР -
ПОЛИЦЕНТР

ПРИБЛИЗИТЕЛЬН
О ЛИНЕЙНАЯ
ЗАВИСИМОСТЬ
ЧИСЛА ЦЕНТРОВ
ОТ ЧИСЛЕННОСТИ
НАСЕЛЕНИЯ
ГОРОДА

$$k \sim \left(\frac{\bar{P}}{P^*} \right)^{\frac{\mu}{\mu+1}}$$

Дорожные сети городов

Основные статистические
характеристики

- Дорожные сети принадлежат к особому классу сложных сетей – пространственным сетям. Эти сети встроены в двухмерное или трехмерное евклидово пространство, а связи между узлами представляют собой реальные физические соединения, в отличие, например, от связей в сетях сотрудничества актеров кино или ученых. Примерами пространственных сетей могут служить нейронные сети мозга, сети электростанций, сети общественного транспорта (автобусные, троллейбусные, метро) и т.п.

Berlin

Hamburg

Munich

Cologne

Table 1. Characteristics of the urban road networks of the 21 largest German cities in the original and the processed data. The quantity N_n is the number of nodes, N_l is the number of links, and N_c is the number of cells in the network. The quantity N_l^* corresponds to the content of the original data with partially directed links, whereas N_l reflects the number of links in the reduced undirected network data base. In the processed data, the spatial density ρ_n of nodes is given.

Rank	City	Population	Area (km ²)	Original				Processed		
				N_n	N_l^*	N_l	N_c	N_n	N_l	N_c
1	Berlin	3 392 425	891	37 020	87 795	50 632	13 545	19 931	33 000	12 929
2	Hamburg	1 728 806	753	19 717	43 819	25 641	5867	9044	14 603	5458
3	Munich	1 234 692	311	21 393	49 521	28 579	7074	11 058	17 934	6737
4	Cologne	968 639	405	14 553	29 359	18 182	3602	5395	8724	3259
5	Frankfurt	643 726	249	9728	18 104	12 366	2622	3911	6394	2445
6	Dortmund	590 831	281	10 326	22 579	12 512	2176	3281	5249	1923
7	Stuttgart	588 477	208	10 302	21 934	12 748	2414	3612	5848	2164
8	Essen	585 481	210	11 387	24 537	14 124	2704	4093	6598	2444
9	Dusseldorf	571 886	218	8237	16 773	10 377	2114	3124	5099	1922
10	Bremen	542 987	318	10 227	21 702	12 748	2477	3827	6106	2198
11	<i>Hannover</i>	<i>517 310</i>	<i>204</i>	<i>1589</i>	<i>3463</i>	<i>1856</i>	<i>266</i>	<i>411</i>	<i>640</i>	<i>225</i>
12	Duisburg	508 664	233	6300	14 333	8141	1832	2837	4573	1710
13	Leipzig	494 795	293	9071	21 199	11 643	2561	3753	6137	2355
14	Nuremberg	493 397	187	8768	18 639	11157	2339	3543	5762	2141
15	Dresden	480 228	328	9643	22 307	11 977	2321	3346	5488	2109
16	Bochum	388 869	146	6970	15 091	8437	1455	2233	3555	1276
17	Wuppertal	363 522	168	5681	11 847	6869	1177	1750	2803	1029
18	Bielefeld	324 815	259	8259	18 280	9880	1613	2546	4035	1461
19	Bonn	308 921	141	6365	13 746	7762	1381	2094	3365	1238
20	Mannheim	308 759	145	5819	12 581	7607	1765	2674	4364	1652
21	Karlsruhe	281 334	173	5505	11 866	7004	1488	2204	3594	1366

Дрезден

а) Изохроны 1:2:3 в) Число перекрестков /сек

Shortest paths in the road network of Dresden. The width of the links corresponds to the respective loadness, that is an approximate measure of the amount of traffic on that roads

The distribution of the node betweenness centrality obeys the power-law with the exponent 1.355 for Dresden (dotted line)

Figure 5. (a) Frequency distribution of neighbourhood degrees k_c of the cells in the road network of Dresden. The predomination of cells with four neighbours was found in all 20 German road networks. (b) The frequency distribution of the cell's surface areas A_c obeys the scale-free power-law $P(A_c) \sim A_c^{-\alpha}$ (dotted line) with the exponent $\alpha = 1.892$ for the road network of Dresden.

СЕТЧАТОСТЬ MESHEDNESS

Во многих сложных сетях важным свойством является топология коротких циклов. Для этого необходимо оценивать количество циклов определённой формы, будь то треугольники (длина цикла $L = 3$), квадраты (регулярная сетка с $L = 4$) или в виде сот ($L = 6$). Для первого случая ($L = 3$) достаточно вычислять коэффициент кластеризации C , который показывает количество треугольников в сети. Для более сложных циклов такой метод окажется бесполезным, поскольку коэффициент кластеризации будет давать нулевое значение для любого цикла с $L \neq 3$. Поэтому было введено понятие коэффициента «сетчатости», который позволяет оценить структуру сети с циклами произвольных длин.

СЕТЧАТОСТЬ

MESHEDNESS

Коэффициент сетчатости определяется по формуле $M=F/F_{\max}$, где F – количество граней (без внешней грани) планарного графа с количеством вершин N и количеством рёбер K , которое может быть выражено через формулу Эйлера $F=K-N+1$. $F_{\max}$ – это максимально возможное число граней в связном планарном графе с тем же количеством вершин N и, соответственно, количеством рёбер $K_{\max}=3N-6$. (так как связный граф – это граф, в котором все вершины связаны). Таким образом, $F_{\max}=2N-5$ и значение коэффициента сетчатости может принимать

значение от нуля (древовидная структура) до единицы (связный граф). Значит, при увеличении коэффициента сетчатости, сложность структуры сети увеличивается.

Для количественного описания дорожных сетей каждого города подсчитаем число циклов длины три, четыре и пять, обозначив их соответственно C_3 , C_4 , C_5 и C_3^{GT} , C_4^{GT} , C_5^{GT} для соответствующего GT графа.

Таблица 1. Локальные свойства дорожных сетей некоторых городов мира.

Номер	Город	M	C_3/C_3^{GT}	C_4/C_4^{GT}	C_5/C_5^{GT}
1	Ахмедабад	0.262	0.023	0.042	0.020
2	Барселона	0.275	0.019	0.101	0.019
3	Болонья	0.214	0.015	0.048	0.013
4	Бразилиа	0.147	0.029	0.027	0.012
5	Каир	0.253	0.020	0.043	0.019
6	Ирвин 1	0.085	0.035	0.022	0.005
7	Ирвин 2	0.014	0.007	0.004	0.001
8	Лос-Анджелес	0.211	0.002	0.075	0.011
9	Лондон	0.249	0.011	0.060	0.020
10	Нью-Дели	0.154	0.011	0.020	0.011

9	Лондон	0.249	0.011	0.060	0.020
10	Нью-Дели	0.154	0.011	0.020	0.011
11	Нью-Йорк	0.348	0.024	0.136	0.028
12	Париж	0.241	0.028	0.063	0.016
13	Ричмонд	0.279	0.034	0.068	0.022
14	Саванна	0.322	0.002	0.111	0.026
15	Сеул	0.253	0.021	0.051	0.021
16	Сан-Франциско	0.309	0.003	0.148	0.003
17	Венеция	0.152	0.016	0.030	0.010
18	Вена	0.242	0.007	0.063	0.018
19	Вашингтон	0.293	0.026	0.132	0.022

СЕТЧАТОСТЬ

20	Уолнат-Крик	0.084	0.000	0.011	0.003
21	Москва (центр)	0.248	-	-	-
22	Новая Москва	0.174	-	-	-

Получается, что дорожные сети Нью Йорка, Сан Франциско и Саванна имеют наиболее сложную картину – их коэффициент сетчатости M превышает 0.3. Города Ирвин и Уолнат Крик имеют наиболее простую древовидную структуру и их коэффициент M меньше 0.1. В семнадцати городах из двадцати $C_4/C_4^{GT} > C_3/C_3^{GT}$ и только в Бразилиа, Ирвине 1 и Ирвине 2 мы видим превалирование треугольников (циклов длины три) над квадратами. В Лос-Анжелесе, Саванне и Вене – $C_5/C_5^{GT} > C_3/C_3^{GT}$.

Масштабная инвариантность живых организмов

универсальные количественные характеристики городов

- Численность населения – определяющая характеристика
- Пространство, приходящееся на жителя
- Темп социально-экономического прогресса
- ВВП на душу населения, среднедушевой доход
- Длина дорожно-транспортного покрытия
- Уровень преступности
- Среднее время в пути
- Выброс углекислого газа на жителя
- Длина линий электропередач

Масштабная инвариантность городов США

PREDICTABLE CITIES

Data from 360 US metropolitan areas show that metrics such as wages and crime scale in the same way with population size.

Зависимость площади города от численности населения

Зависимость длины дорог от численности населения

Моноцентр - полицентр

Число центров активности: скейлинг

$$k \sim \left(\frac{\bar{P}}{P^*} \right)^{\mu/(\mu+1)}$$

$$P^* = c \left(\frac{\ell}{LN_c} \right)^{1/\mu}.$$

Эволюция улично-дорожных сетей городов

УРБАНИЗАЦИЯ

Многочисленные исследования указывают, что дорожные сети являются важнейшим фактором эволюции городов [4]. Emanuele Strano et al. [11] исследовали количественные закономерности эволюции дорожной сети Милана и территории известной как Гроана (Groane) на севере Милана, площадью 125 квадратных километров, за последние почти 200 лет с точки зрения теории сложных сетей.

ЭВОЛЮЦИЯ ДОРОЖНОЙ СЕТИ С 1833 ДО 2007

РОСТ НАСЕЛЕНИЯ И ЧИСЛА ПЕРЕКРЕСТКОВ

E

The Backbone of a City

- Была изучена также связь между возрастом улиц и их загруженностью. Наиболее загруженные улицы, как правило, оказались наиболее древними. В частности, улицы и дороги, существовавшие до 1833 года, оказались намного более загруженными, чем появившиеся позднее. Было замечено также, что исторические районы города в основном совпадают с наиболее загруженными улицами 2007 года. Эти же районы во многих случаях оказываются центрами деловой и торговой активности города а также местами, наиболее привлекательными для туристов. Полученные результаты выявляют основу, «становой хребет» дорожной структуры города, формирующейся еще в его доиндустриальный период, но являющийся зародышем будущего процесса урбанизации.

«Становой хребет» Москвы

1	ул. Крымский Вал и Мароховский пер.	0.12080223
2	Кремлевская наб. и Манежная ул.	0.11782663
3	пл. Арбатские Ворота и ул. Знаменка	0.11406057
4	Зубовский бул. и ул. Остоженка	0.10685029
5	Пречистенская набережная и Соколовский пр.	0.10623580

В эволюции дорожной сети многих крупных городов можно выделить две основные закономерности: Самоорганизация или «органическое», естественное развитие как результат одновременного воздействия на городскую среду множества различных факторов (экономических, географических, социально-демографических и других).

- Централизованное планирование или планирование сверху вниз (top-down planning) обычно сводящееся к действиям одного лица. Примером может служить развитие дорожной сети центра Парижа в 19 веке под руководством барона Османа (baron Haussmann) которому Наполеон III в 1852 году поручил модернизировать транспортную систему Парижа, назначив префектом департамента Сена.

ПАРИЖ

барон Осман (Haussmann)

ΝΟΡΜΑΝ ΦΟΣΤΕΡ

Фостер СИТИ-ХОЛЛ, Лондон

Норман Фостер, Лондон

Millennium footbridge, London
Architect Lord Norman Foster,
sculptor Sir Anthony Caro

ЛОНДОН

- Информационные и навигационные аспекты эволюции дорожной сети, а также ограничения на развитие города, накладываемых окружающей средой, исследовались в работах [3.4] на примере развития центра Лондона (так называемого, Большого Лондона – территории площадью 1600 кв.км.) за последние примерно 200 лет. Дорожные сети городов как планарные графы, разумеется, не являются безмасштабными. Однако, если в качестве узлов взять улицы, и если данным двум узлам соответствуют улицы города, которые пересекаются, то эти два узла соединяются связью. Получающаяся сеть также не является безмасштабной, но обладает свойством «тесного мира».

Пространственное распределение наиболее важных узлов

- Для детального изучения эволюции города, на всех девяти дорожных картах Большого Лондона, соответствующих 1786, 1830, 1880, 1900, 1920, 1940, 1965, 1990 и 2010 годам выделили четыре типа дорог
- Автострады
- Дороги класса А
- Дороги класса В
- Второстепенные, мелкие дороги

- вопрос коэволюции процессов роста дорожной сети и роста населения близлежащих территорий. С одной стороны, дорожная сеть должна развиваться, чтобы лучше служить растущему населению данного региона. С другой стороны, дорожная сеть влияет на доступность и привлекательность различных областей этого региона и приводит к росту цен на жилье и услуги, что сдерживает их дальнейший рост и развитие. На Рисунке 3 можно видеть, что рост числа перекрестков в центре Лондона сопровождался процессом роста населения этого района.

- вопрос коэволюции процессов роста дорожной сети и роста населения близлежащих территорий. С одной стороны, дорожная сеть должна развиваться, чтобы лучше служить растущему населению данного региона. С другой стороны, дорожная сеть влияет на доступность и привлекательность различных областей этого региона и приводит к росту цен на жилье и услуги, что сдерживает их дальнейший рост и развитие. На Рисунке 3 можно видеть, что рост числа перекрестков в центре Лондона сопровождался процессом роста населения этого района.

СПАСИБО !

Пабло Пикассо. Портрет. $\gamma=2.43$, $C=0.343$