

Теория самоорганизованной критичности: Наука о сложности

Подлазов Андрей Викторович

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН

Tiger@Keldysh.ru

ПЛАН ДОКЛАДА

1. Философское введение
2. Жизнь на кромке хаоса
3. Негрубая сложность
4. Грубая сложность
5. Простейшая модель кучи песка
6. Обобщения и приложения
7. Иерархические системы
8. Выводы

1. ФИЛОСОФСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Что такое сложность?

Синергетика – нелинейная динамика

Парадигмы синергетики

Ключевые проявления сложности

Что такое сложность?

- Несводимость системы к простой сумме слагающих её частей;
- Эмерджентность — возникновение у целого свойств, которыми его части не обладают;
- Высокое разнообразие поведения, обусловленное действием единого механизма.

Любая сложная система нелинейна. В линейных системах действует принцип суперпозиции (их можно разбирать на части), а следствие соразмерно причине (нет разнообразия).

Синергетика – нелинейная динамика

Предмет: универсальные механизмы функционирования систем различной природы.

Чтобы быть реализуемым, сложное должно быть устроено просто. Простые схемы немногочисленны и потому универсальны.

Универсальность и простота устройства сложных систем – залог их познаваемости.

Синергетика сопрягает онтологию (учение о бытии) и гносеологию (учение о познании).

Парадигмы синергетики

- 1) Самоорганизация — выделение параметров порядка — небольшого набора ведущих переменных, к динамике которых подстраиваются все остальные;
- 2) Динамический хаос — непериодическое поведение в детерминированных системах;
- 3) Сложность — существование на стыке порядка и хаоса

Ключевые проявления сложности

Масштабная инвариантность – отсутствие у явлений собственных характерных размеров

Склонность к катастрофам – возможность сверхкрупных событий

Целостность – пространственно-временная согласованность поведения частей системы

Грубость свойств – устойчивость качественных особенностей по отношению к мелким модификациям устройства

2. ЖИЗНЬ НА КРОМКЕ ХАОСА

Степенные распределения

Подходы к надёжности и риску

Фликкер-шум (розовый шум)

Фрактальные процессы восстановления

Целостность и катастрофичность

Степенные распределения

Плотность вероятности вида

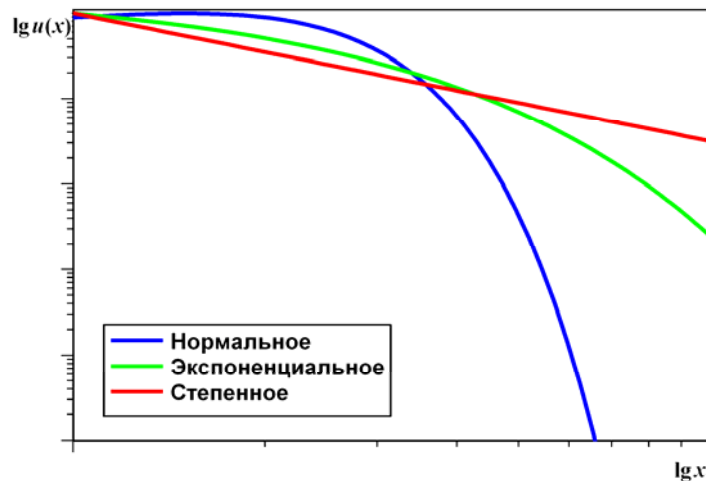
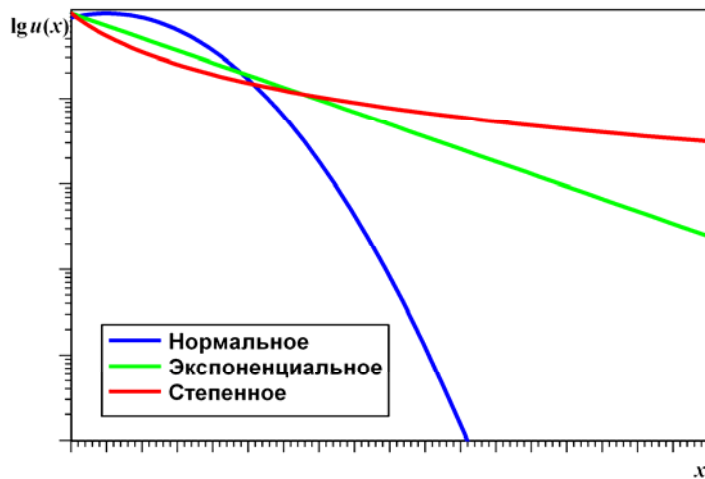
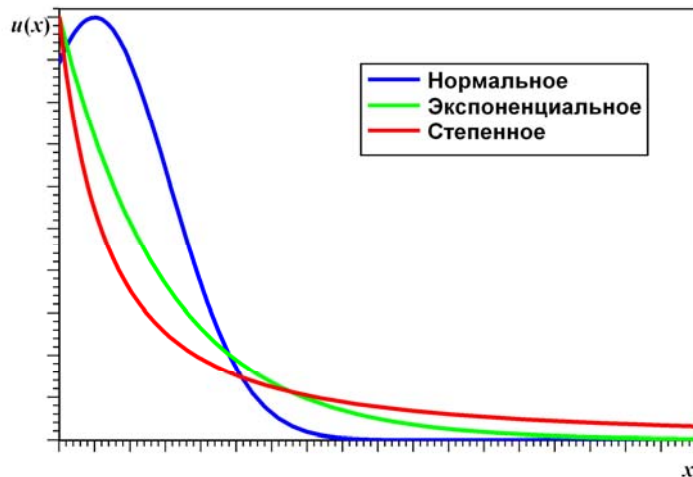
$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \quad \alpha \sim 1.$$

Расходимость моментов распределения:

$$\mu_k = \langle x^k \rangle = \int x^k \cdot u(x) dx = \infty \quad \text{при} \quad k \geq \alpha.$$

Редкие крупные события недостаточно редки, чтобы их вероятностью можно было пренебречь — *тяжёлый хвост*.

Типичный вид плотности вероятности некоторых распределений



Подходы к надёжности и риску

Аварии	Статистика	
	гауссова	степенная
Проект- ные	В порядке вещей	Регулярно происходят
Запро- ектные	Чрезвычайное происшествие	Иногда происходят
Гипоте- тические	Не бывает	Крайне редки, но всё же происходят

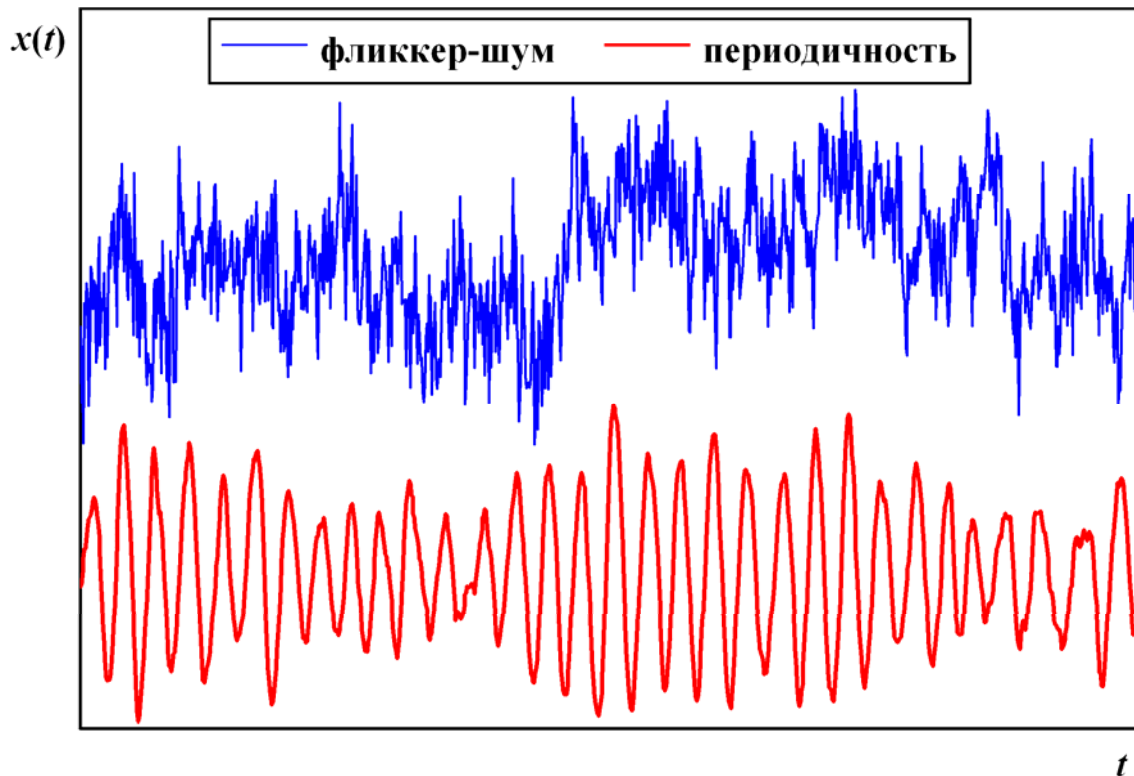
Фликкер-шум (розовый шум)

Степенной вид спектра мощности на низких частотах

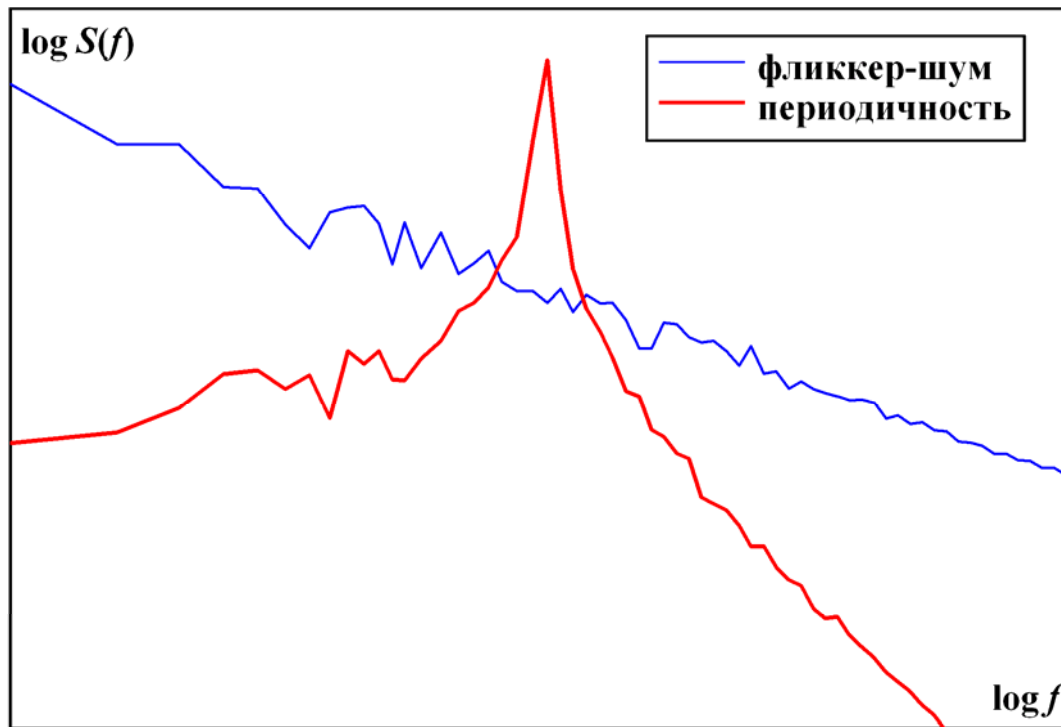
$$S(f) \sim f^{-\beta}, \quad \beta \sim 1.$$

Значительная часть энергии связана с медленными процессами — прогноз невозможен.

Фликкер-шум — сильная нелинейность: спектральным компонентам нельзя придать самостоятельный физический смысл.



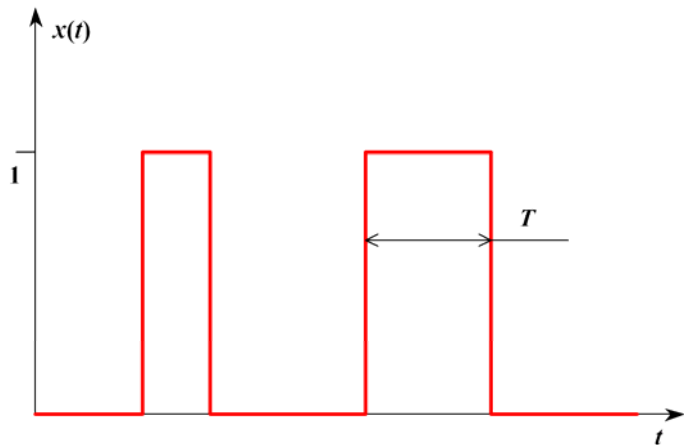
Пример фликкер-шума и сигнала
с выраженной периодической составляющей



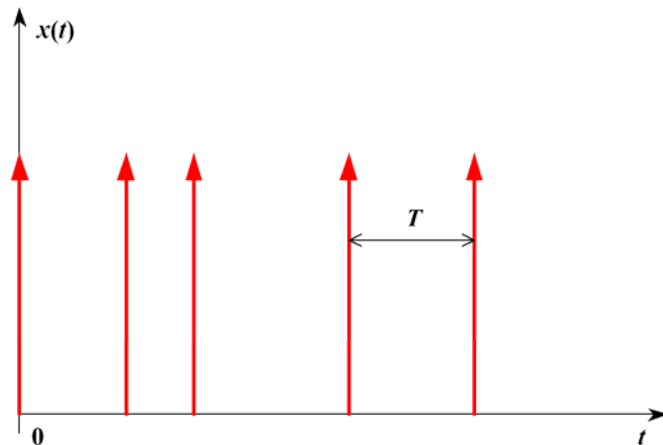
Спектры мощности приведённых сигналов
в двойном логарифмическом масштабе

Фрактальные процессы восстановления

переменный



стандартный



$$u(T) \sim T^{-(1+\alpha)}$$

$$S(f) \sim f^{\alpha-2}$$

$$S(f) \sim f^{-\alpha}, \quad \alpha < 1$$

Целостность и катастрофичность

Степенной вид пространственных и временных корреляций: система долго «помнит» свое прошлое, а её части «чувствуют» друг друга на большом расстоянии.

Для катастрофического поведения части системы должны иметь возможность действовать согласованным образом.

Катастрофа — из ряда вон выходящее событие, много большее типичного (среднего).

3. НЕГРУБАЯ СЛОЖНОСТЬ

Изначальная целостность

Модель конкурентного роста

Ветвящийся процесс

Свойства ветвящегося процесса

Магнитный фазовый переход

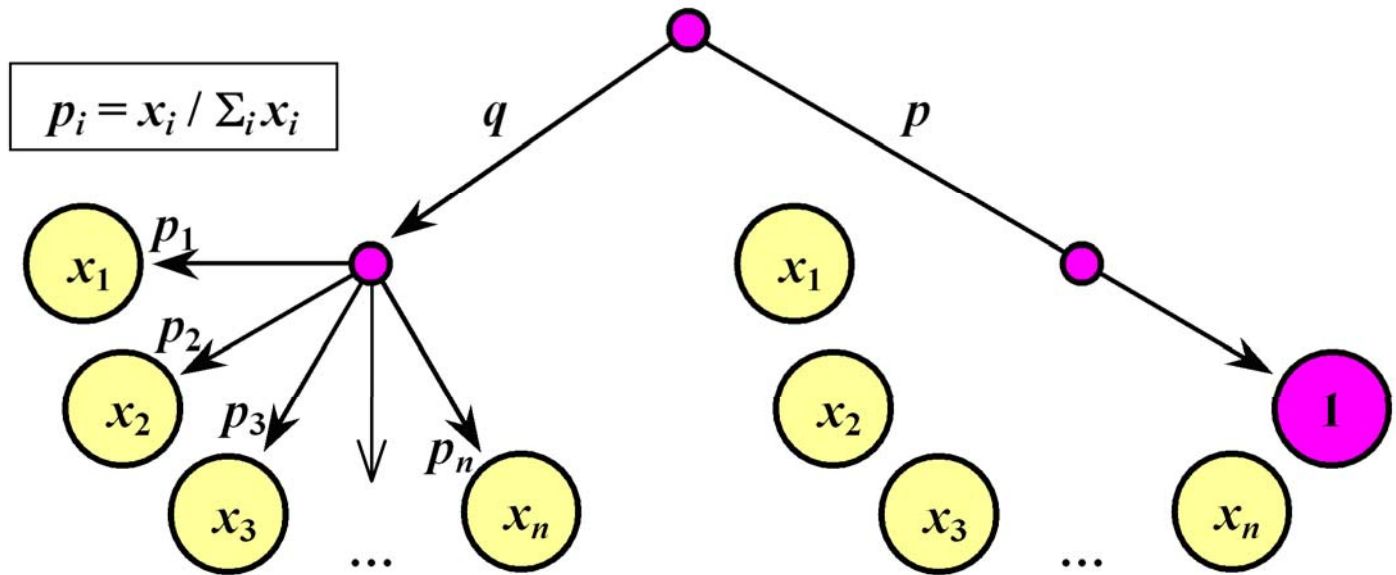
Теория фазовых переходов II рода

Изначальная целостность

Возможность влиять на интегральные характеристики системы или хотя бы использовать информацию о них в локальных правилах позволяет достигать масштабной инвариантности без взаимодействия элементов друг с другом и даже в линейном случае.

При таком подходе вопрос о механизмах, обеспечивающих целостность системы, не рассматривается.

Модель конкурентного роста



Скорость роста агентов, пропорциональна их размеру (на деньгу деньга бежит)

$$\dot{x}_i = f(x_i, t) = g(t) \cdot x_i \quad \text{поле скоростей}$$

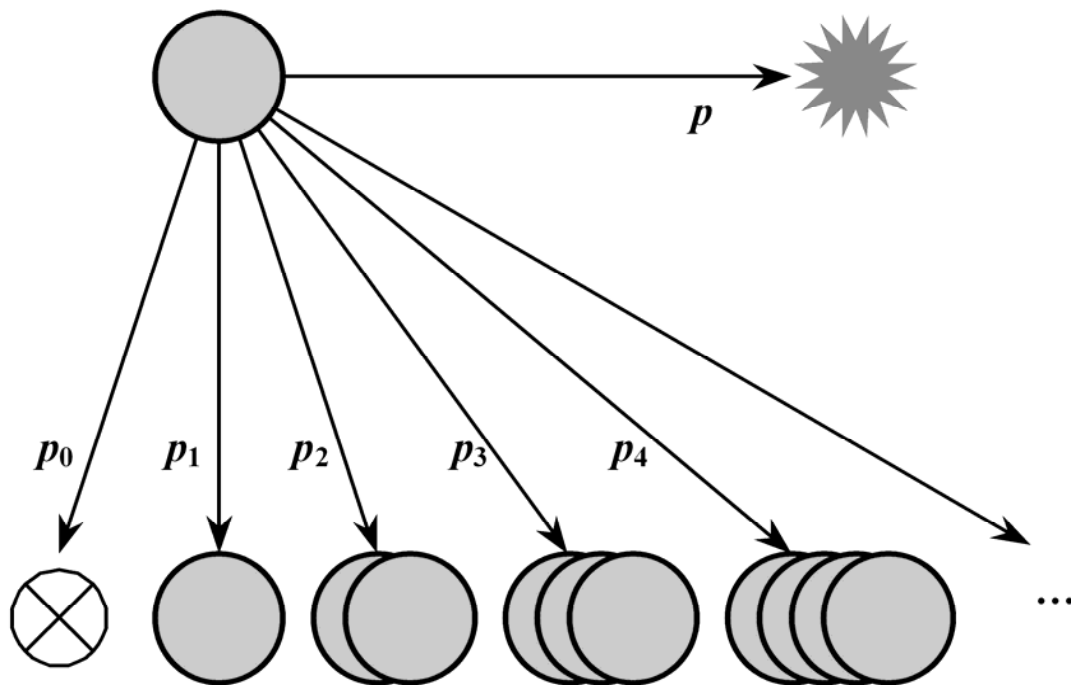
$$N(x, t) = u(x) \cdot n(t) \quad \text{количество агентов}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \frac{\partial}{\partial x} (fN) = 0 \Leftrightarrow -\frac{(xu)_x}{u} = \frac{n_t}{ng} = \alpha$$

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)} \quad \text{распределение агентов}$$

При $g = q/t$ и $n \sim t$ показатель $\alpha = 1/q \approx 1$.
 Рост и образование агентов балансируются ($\alpha \sim 1$) за счёт изначальной целостности.

Ветвящийся процесс



Ветвящийся процесс можно интерпретировать как эпидемию.

Что происходит с больным за день:

- p — смерть (распад);
- p_0 — выздоровление;
- p_1 — без изменений;
- p_{1+i} — заражение ещё $i > 0$ человек.

Предмет анализа — число умерших n при 1 больном в начальный момент времени (число потомков 1 частицы, распавшихся к моменту завершения ветвящегося процесса).

Свойства ветвящегося процесса

Процесс ветвится при $a = \sum_i i(i-1) \cdot p_i > 0$.

Процесс завершается при $m = \sum_i i \cdot p_i \leq 1$.

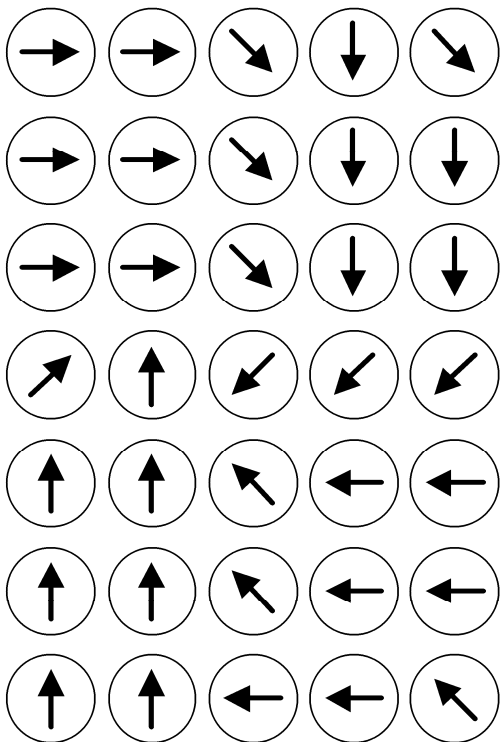
Распределение числа распадов:

$$u_n \sim n^{-(1+\alpha)} \cdot e^{-\beta n}, \quad \alpha = 1/2, \quad \beta \approx (1-m)^2 / 2ap$$

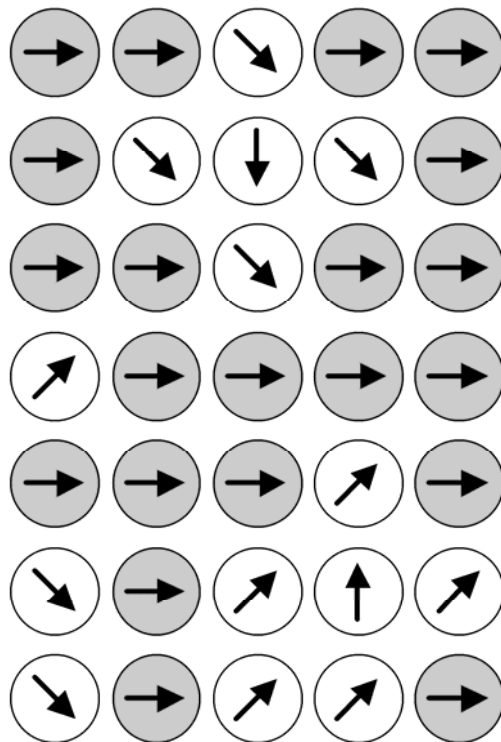
При $m = 1$ плотность – чисто степенная (критический ветвящийся процесс).

Для возникновения масштабной инвариантности требуется подстройка параметров

Магнитный фазовый переход



$T > T_c$ – хаос



$T < T_c$ – порядок

Теория фазовых переходов II рода

$$U = a_0 + a_2(T - T_c)m^2 + a_4m^4 + \dots \quad \text{энергия}$$

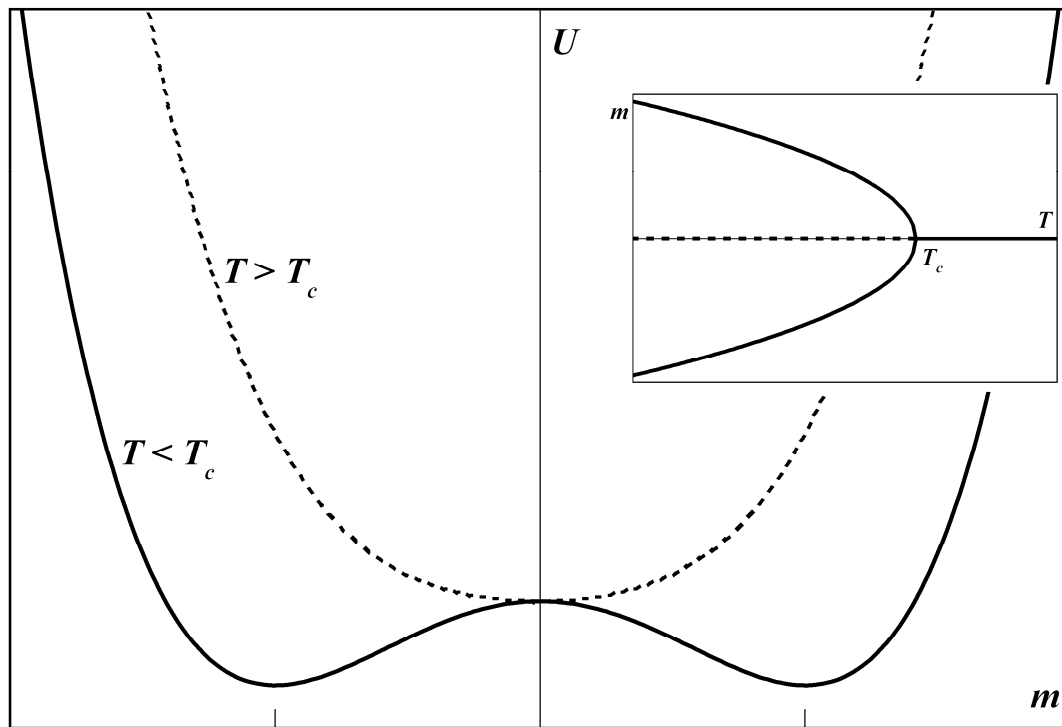
$$a_2(T - T_c)m + 2a_4m^3 = 0 \quad \text{равновесие}$$

При $T > T_c$ есть только одно решение:

$$m = 0 \quad \text{парамагнетик}$$

При $T < T_c$ появляются ещё два решения:

$$m = \pm \sqrt{a_2(T_c - T)/2a_4} \quad \text{ферромагнетик}$$



Потенциал и бифуркационная диаграмма
для магнитного фазового перехода

4. ГРУБАЯ СЛОЖНОСТЬ

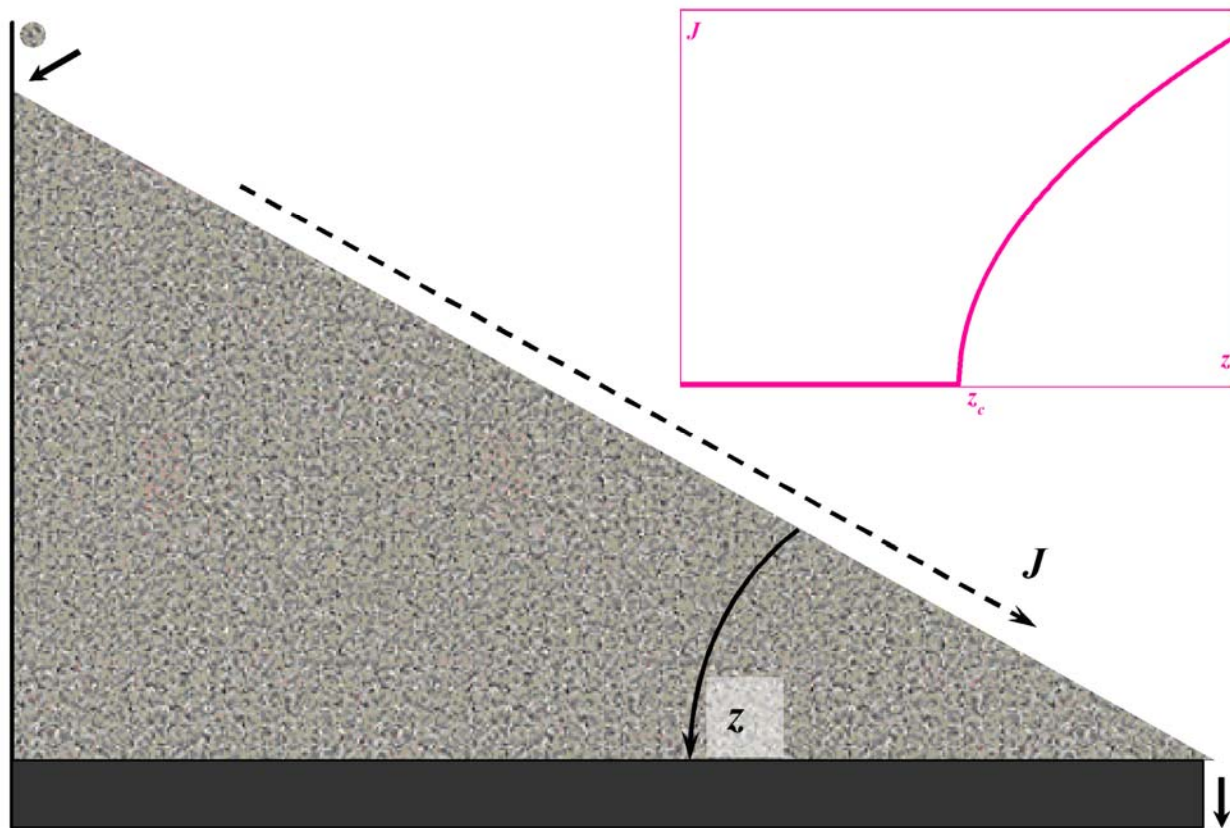
«Песочная» парадигма

Фазовый переход для кучи песка

Самоорганизованная критичность

Механизм самоорганизации

«Песочная» парадигма



Фазовый переход для кучи песка

Наклон песка z – управляющий параметр.
Ток песка J – параметр порядка.

Значение z_c разделяет *хаотическую* ($J = 0$) и *упорядоченную* ($J > 0$) фазы. В них система не склонна к катастрофам, т.к. возмущения:

- в хаотической фазе – *ещё* быстро затухают во времени и пространстве;
- в упорядоченной фазе – *уже* не могут ощутимо повлиять на положение дел.

Самоорганизованная критичность

Правый край кучи открыт. Песчинки по одной добавляются на её вершину.

Отрицательная обратная связь, подстраивающая наклон к критическому значению z_c :

- при $z < z_c$ лавины быстро затухают, не достигая краёв кучи, и z увеличивается;
- при $z > z_c$ лавины охватывают всю кучу, вынося много песчинок, и z уменьшается;
- при $z = z_c$ лавины едва достигают края.

Механизм самоорганизации

Управляющий параметр самостоятельно находит априори неизвестное значение $z = z_c$ при установке параметра порядка в значение $J = +0$, разделяющее временные масштабы.

В результате самоорганизации у системы возникают целостные свойства.

Одна песчинка способна вызвать лавину произвольного размера — малые причины могут приводить к большим последствиям.

5. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ КУЧИ ПЕСКА

Модель Дхара–Рамасвами

Распределение лавин по площади

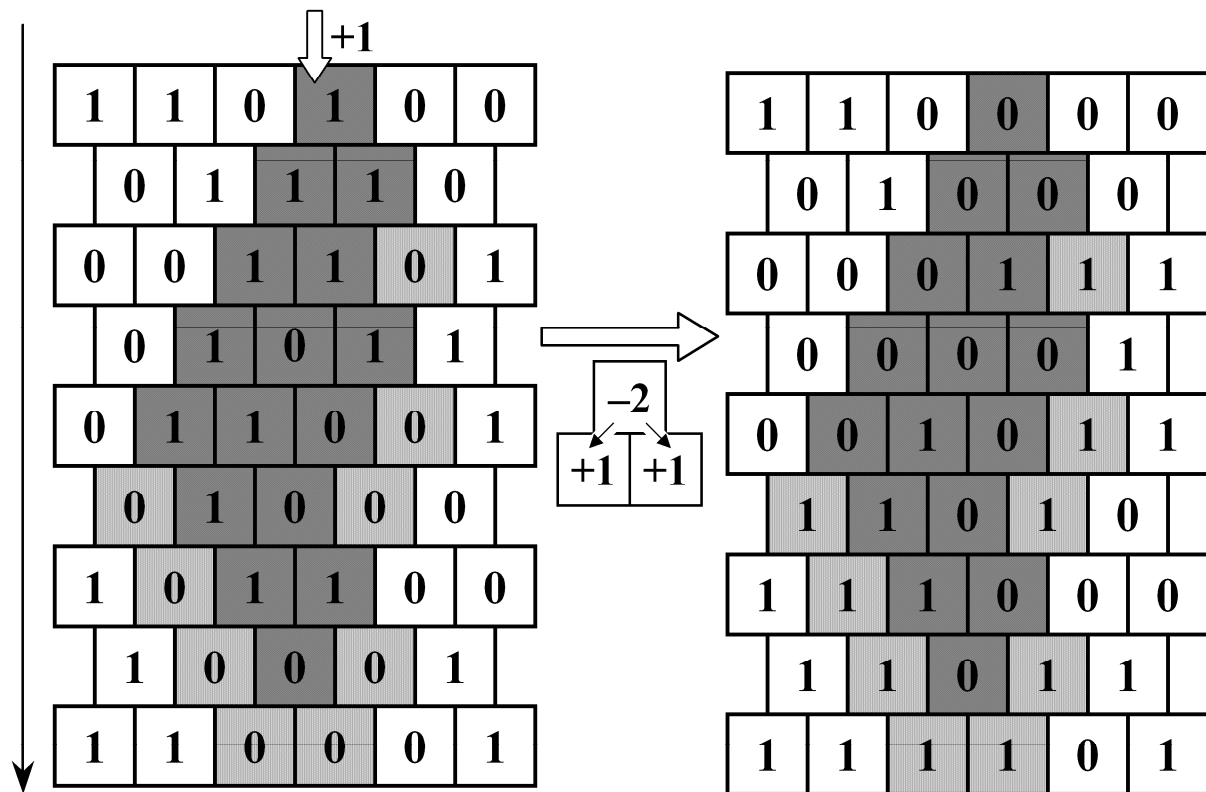
Конечно-размерный скейлинг

Промежуточная асимптотика

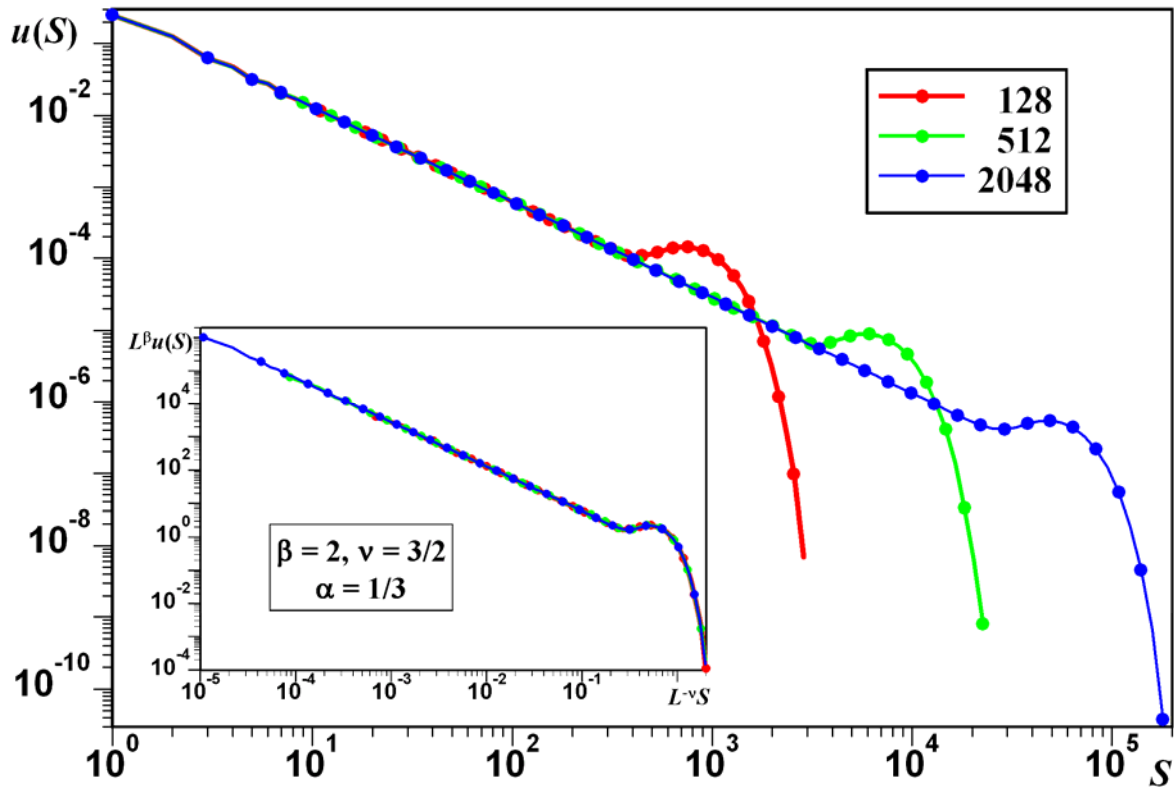
Решение модели ДР

Экономическая интерпретация

Модель Дхара–Рамасвами



Распределение лавин по площади



Конечно-размерный скейлинг

Для системы конечного размера L

$$u(x) = L^{-\beta} \cdot g(xL^{-\nu})$$

$g(y)$ – скейлинговая функция,

β и ν – скейлинговые показатели

Размер событий, крупных настолько, что уже не подчиняются степенной статистике

$$x_1 \sim L^{\nu}.$$

Промежуточная асимптотика

При $x \ll x_1$

$$x^{-(1+\alpha)} \sim L^{-\beta} \cdot g(xL^{-\nu}) \Rightarrow \nu(1+\alpha) = \beta$$

Средний размер события

$$\langle x \rangle = \int x \cdot u(x) dx \sim L^{\nu(1-\alpha)} \ll x_1 \sim L^{\nu}$$

Среднее малó по сравнению с типичными крупными событиями – катастрофичность.

Решение модели ДР

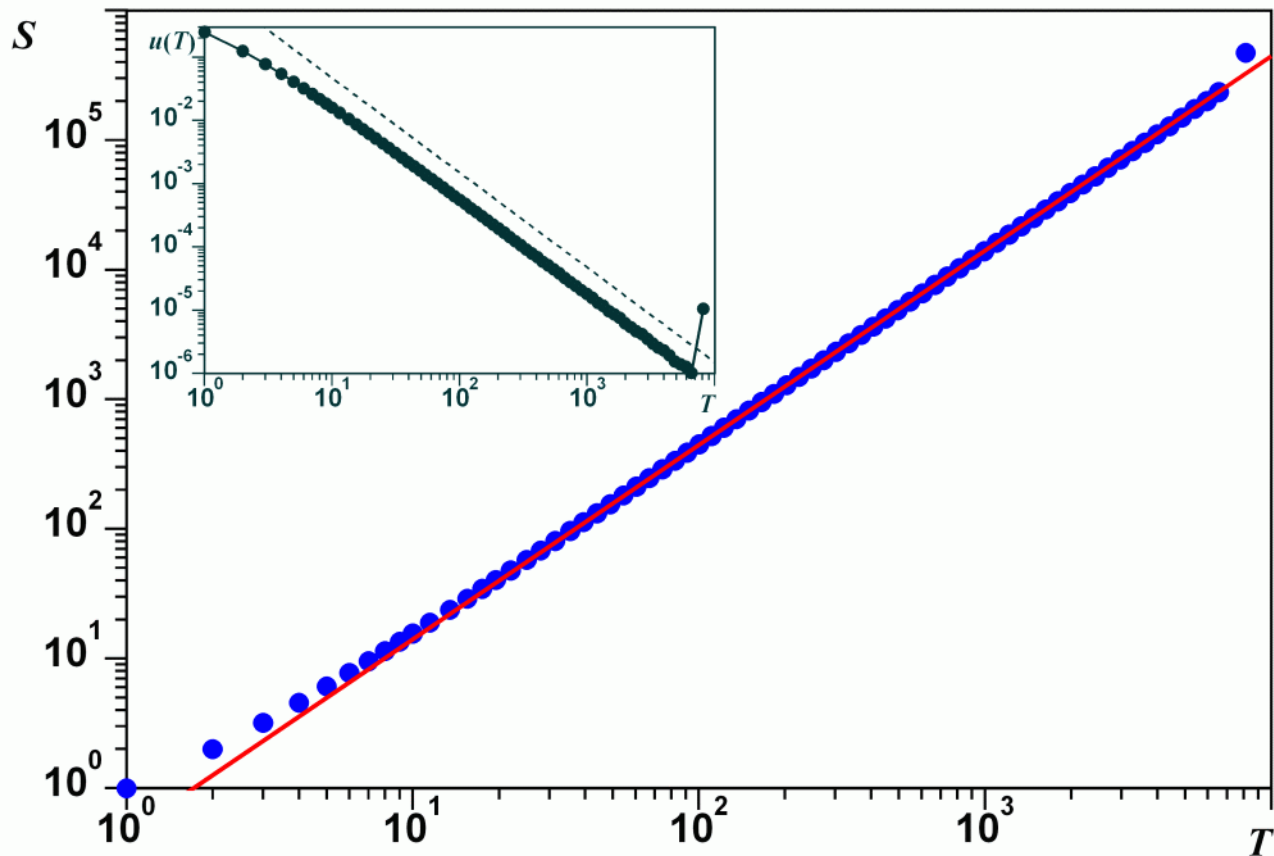
Ни одна ячейка не затрагивается дважды:

S – площадь лавины (число осыпаний);

T – длительность лавины (число затронутых ею слоёв).

В критическом состоянии среднее изменение ширины области лавины $w(t)$ от слоя к слою равно нулю – диффузия:

$$w(t) \sim \sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad S(T) \sim \int_0^T w(t) dt \sim T^{3/2}$$



$L = 2^{13}$: $S(T) \sim T^{3/2}$; врезка: $u(T) \sim T^{-3/2}$

Характерная длительность крупных лавин – размер решётки L :

$$T_1 \sim L \quad \Rightarrow \quad v_T = 1$$

$$S_1 \sim T_1^{3/2} \sim L^{3/2} \quad \Rightarrow \quad v_S = 3/2$$

За шаг через систему проходит в среднем одна песчинка, что требует $\sim L$ осыпаний

$$\langle S \rangle \sim L^1 \quad \Rightarrow \quad v_S(1 - \alpha_S) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_S = 1/3$$

$$u_S(S)dS = u_T(T)dT \quad \Rightarrow \quad \alpha_T = 3\alpha_S/2 = 1/2$$

Экономическая интерпретация

Ячейки решётки – экономические агенты. Слои – различные уровни передела. Числа – отложенные запросы на поставку.

Каждый агент производит две единицы своего продукта, используя по единице продукта, полученного от смежников снизу.

Добавление единички в верхний слой – запрос продукта от конечного потребителя.

Такой запрос может вызвать вспышку активности произвольного размера.

6. ОБОБЩЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Общее устройство СК–систем

Функционирование мозга (гипотеза)

Биологическая эволюция

Ландшафт приспособленности

Модель эволюции Бака–Снеппена

Общее устройство СК–систем

Рост — естественный путь развития элементов системы.

Отбраковка — возвращение к началу пути наиболее успешных с одновременным дополнительным продвижением их соседей.

Если отбраковка идёт много быстрее, чем рост, равновесие достигается в критической точке, где события едва происходят, а система приобретает целостные свойства.

Функционирование мозга (гипотеза)

Стимул требует адекватного отклика.

Если это не рефлекс, сигнал должен достичь области коры с нужной информацией.

Распространение сигнала по нейронам:

- подкритическое – затухание;
- надкритическое – взрыв активности.

Самоорганизация нейронов:

- часто активируемые – усиление связей;
- слишком часто – в рефлекторные дуги.

Биологическая эволюция

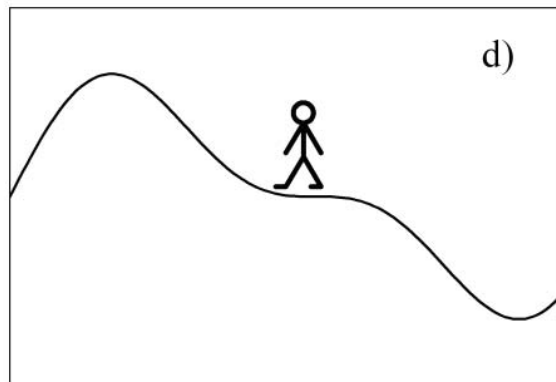
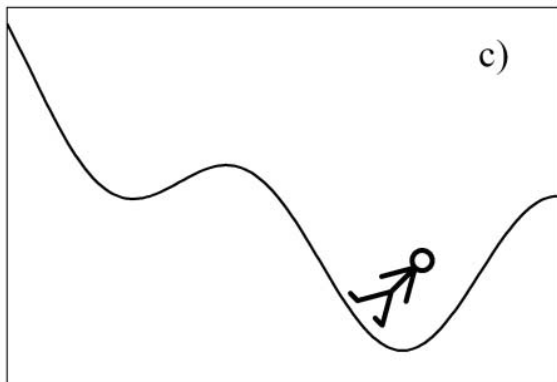
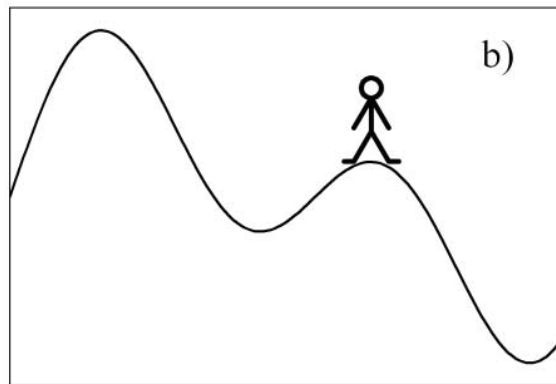
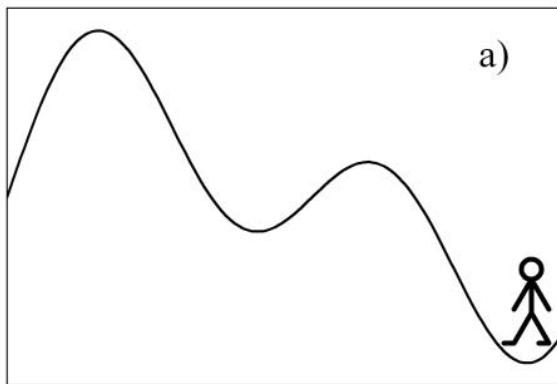
Изменения приспособленности вида:

- 1) мутации и отбор – увеличивают;
- 2) взаимодействие – уменьшает.

Взаимодействие между видами:

- слабое – упорядоченная фаза (некуда эволюционировать);
- сильное – хаотическая фаза (эволюция тщетна – эффект Чёрной королевы);
- умеренное – критическая точка.

Ландшафт приспособленности



Модель эволюции Бака–Снеппена

Приспособленность вида характеризуется *фитнесом* — $f \in [0; 1]$. Чем он меньше, тем скорее с видом должно что-то произойти (вымирание или псевдовымирание).

Шаг модели: замена вида с наименьшей приспособленностью и двух его соседей, взаимодействующих с ним, новыми видами со случайными фитнесами:

$$f_i, f_{i\pm 1} \leftarrow R[0;1], \quad \text{где } i = \arg \min \{f_i\}$$

7. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Пространственная перенормировка

Модель дефектообразования Блантер–Шнирмана

Изменение концентрации дефектов

Фазовая диаграмма модели БШ

Динамика переключений модели БШ

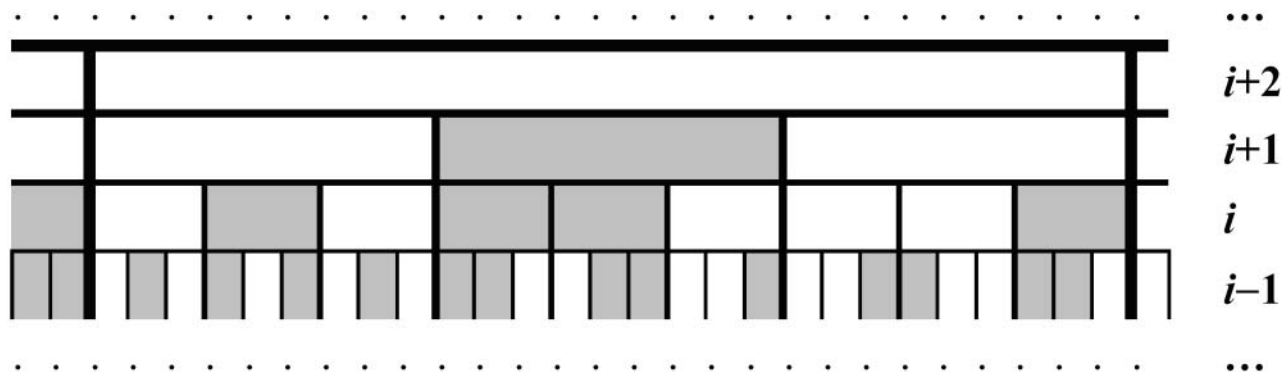
Пространственная перенормировка

Масштабно-инвариантные системы устроены одинаково на всех уровнях организации, т.е. не меняются при смене разрешения.

Масштабное преобразование (перенормировка) — огрубление пространственного разрешения. Критическое состояние — неподвижная точка этого преобразования.

Перенормировка — альтернатива динамике при анализе критичности.

Модель дефектообразования Блантер–Шнирмана



Элементы – исправны или дефектны.

Их состояние определяется состоянием
компонент и восприимчивостью к дефектам.

s_k — доля элементов, для дефектности которых необходимо не менее k дефектных составляющих ($s_1 + s_2 + s_3 = 1$).

p_0 — концентрация дефектных элементов на нижнем уровне $i = 0$.

Изменение концентрации дефектных элементов p при подъёме на уровень ($i \rightarrow i+1$):

$$p_{i+1} \rightarrow F(p_i)$$

$$F(p) = s_1 \cdot (1 - q^3) + s_2 \cdot (p^3 + 3p^2q) + s_3 \cdot p^3$$

$$q = 1 - p$$

Неподвижные точки отображения $p = F(p)$:

- тривиальные: $p = 0, p = 1$;
- критическая:

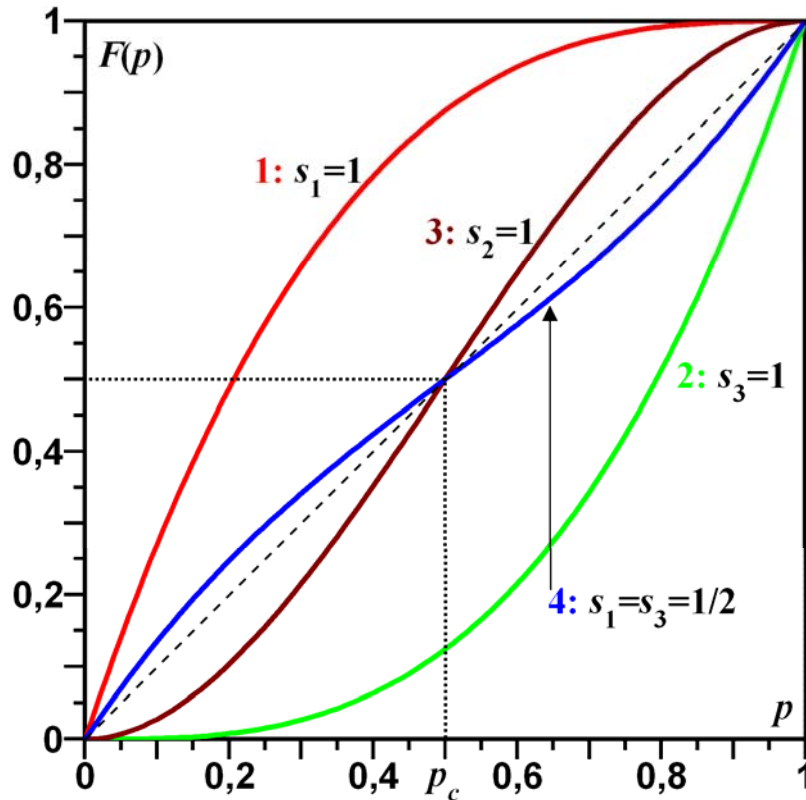
$$p_c = \frac{1 - 3s_1}{3s_2 - 1}, \quad 0 < p_c < 1.$$

Устойчивость неподвижной точки:

$$|F'(p)| = 3 \cdot (s_1 \cdot q^2 + s_2 \cdot 2pq + s_3 \cdot p^2) < 1.$$

$$|F'(p)| = 1 - \text{бифуркация.}$$

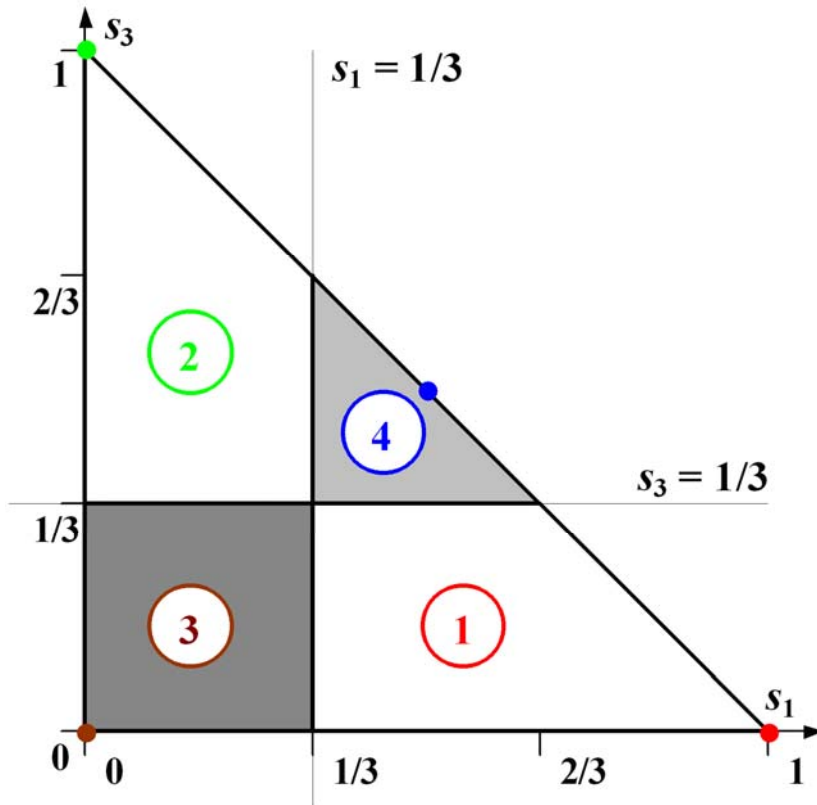
Изменение концентрации дефектов



Устойчивость неподвижных точек:
 $p = 1$ – 1 и 3;
 $p = 0$ – 2 и 3;
 $p_c = 1/2$ – 4.

Случай 4 – само-
организованная
критичность, 3 –
обычная.

Фазовая диаграмма модели БШ



1, 2 – критического состояния нет вовсе

3 – критическое состояние – при выборе $p_0 = p_c$

4 – критическое состояние возникает при $p_0 \neq 0; 1$

Динамика переключений модели БШ

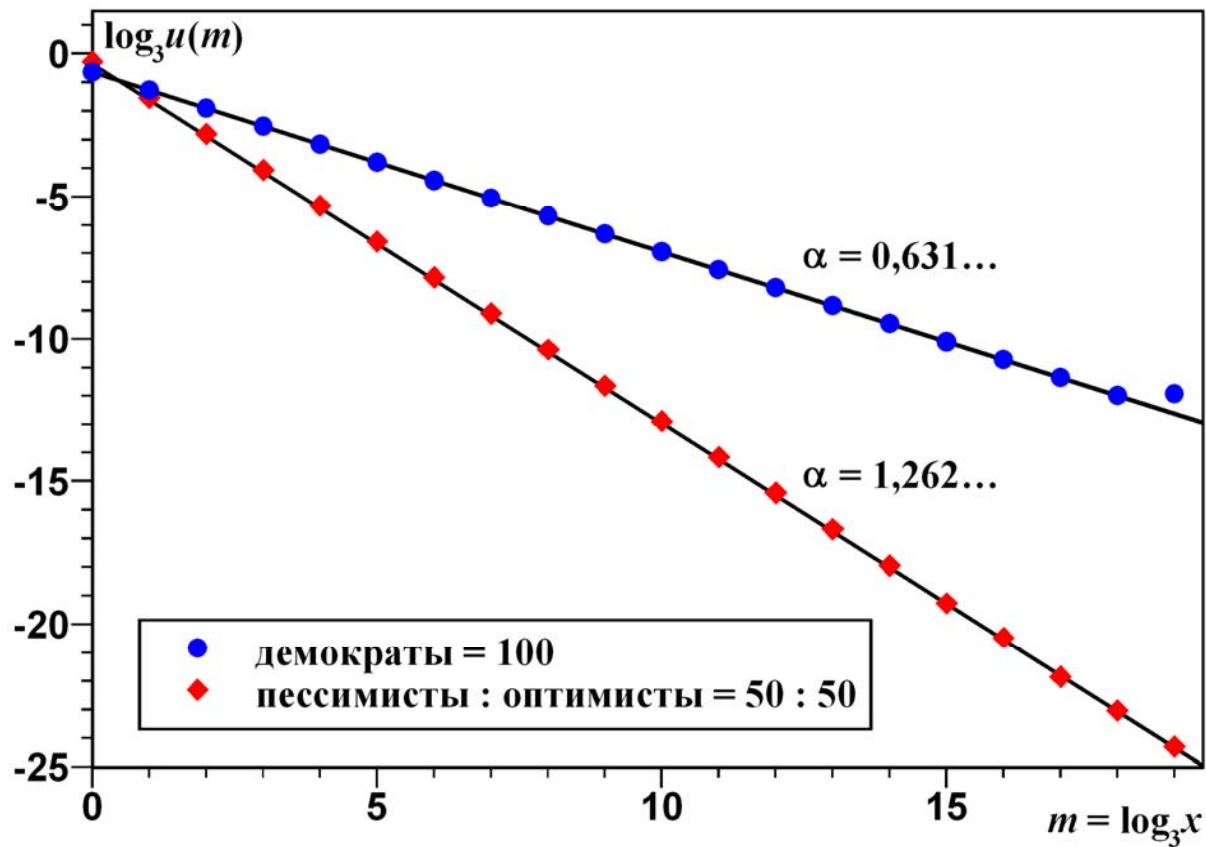
Возмущение – переключения состояния одного элемента на нижнем уровне ($p_0 = p_c$).

Вероятность передачи изменения вверх:

$$P = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{(3s_1 - 1) \cdot (3s_3 - 1)}{(3s_1 - 1) + (3s_3 - 1)} \right)$$

Вероятность затронуть элемент размера x :

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \quad \alpha = -\log_3 P$$



Случаи предельных значений показателя α .

8. ВЫВОДЫ

Физическим выражением сложности являются масштабная инвариантность и целостность, математическим — степенные распределения вероятностей и корреляции.

Сложность возникает либо благодаря искусственной организации (изначальная целостность или тонкая подстройка параметров), либо в результате самоорганизации в критическое состояние.

Спасибо за внимание!

