Аксиомы, распространение хаоса, самоорганизация и устойчивость в классической математической физике

В. А. Малышев (мехмат МГУ)

Наука - странная среда,
где есть все и ничего **невозможно выкинуть:**
эксперимент
интуиция
мистика
словоблудие
кучкование-групповщина
вертикали научной власти
компьютерное моделирование
теория и логика (в т.ч. и присущая математике)

Я называю **матфизикой** попытки перевести **теорфизику** на математический язык, и в частности проверить логику .
Прежде всего это нужно самой математике
так как любимое занятие математиков
1. Выдумать или взять откуда то аксиомы
2. Вывести из них все что можно
3. Записать эти выводы на своем тарабарском математическом языке, который математики называют СТРОГИМ.
Ибо **математика и есть этот самый язык**.

Теорфизики этот язык не всегда понимают, не любят, поэтому используют вместо него довольно смелые, далеко не всегда оправданные, манипуляции с формулами.
А в математиках часто хотят видеть явных решателей их уравнений.
Но явные решения далеко не главная часть математики.

Но и сама теорфизика очень разная. Примером могут быть два фундаментальных курса - оба плоды титанического труда, но две крайности в изложении::
1. Ландау-Лифшица. Как справочник - принудительно констатирует не обсуждая
2. Феймановский курс - учит удивляться и прививает сомнения.
Вот пример оттуда об электрическом токе

"... Сила толкает электроны вдоль проволоки. Но почему же при этом приходит в движение стрелка гальванометра, который расположен так далеко от этой силы ? Да потому, что электроны, испытывающие магнитную силу, начинают двигаться и толкают (за счет электрического отталкивания) другие электроны, находящиеся чуть дальше по проволоке, а те, в свою очередь, отталкивают еще более удаленные электроны и так далее на большое расстояние. Любопытная штука. Это так удивило Гаусса и Вебера, построившего впервые гальванометр, что они попытались определить, как далеко распространяются силы по проволоке. Они протянули проволоку поперек всего города и один ее конец Гаусс присоединил к батарее (батареи были известны раньше генераторов), а Вебер наблюдал как сдвигается стрелка гальванометра ... "

Так писал Фейнман в своих лекциях по физике (том 6, стр. 34). Однако впоследствии, эта “любопытная штука” физиками игнорировалась, а математики о ней и не подозревали. И до сих пор во всех курсах обсуждается модель Друде-Лоренца 1900 года, где электрон движется под влиянием постоянной ускоряющей силы F, сталкиваясь с атомами, которые его тормозят. В результате конечно устанавливается постоянная скорость и значит как бы “доказан” **закон Ома**.

Так что основной вопрос - откуда взялась сила F на всем протяжении провода ?

Ведь внешняя сила действует только на нескольких метрах, а ток течет на сотни километров. Ответ конечно такой - сила создается полем. Но каким и как ? Надо объяснить, но объяснить исходя из каких аксиом ?

Ответ - сила возникает из за самоорганизации электронов кулоновской силой отталкивания.

Цепочка частиц, отталкивающих друг друга на окружности (одномерная модель)

$$\ldots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \ldots$$

Сила на частицу k будет направлена **направо**, если ее расстояние до левой частицы будет МЕНЬШЕ чем до правой, тогда левая частица будет ближе и будет сильнее отталкивать, то есть расстояния $r_k = x_k - x_{k-1}$ связаны неравенствами

$$r_k < r_{k+1} \iff r_{k+1} - r_k > 0,$$

и будет **постоянной**, если

$$\frac{1}{r_k^2} - \frac{1}{r_{k+1}^2} = const$$

Здесь я для простоты предполагаю взаимодействие с ближайшими соседями.

Доказывается

1. Очень быстрая самоорганизация - установление постоянного течения,

2. при котором будет постоянная и медленная скорость 1-10 мм/сек,

3. а также постоянная плотность электронов. Но это может быть, только если $r_{k+1} - r_k$ намного меньше самих r_k. Например

$$r_k = \frac{D}{N}, r_{k+1} - r_k \approx \frac{1}{N^2}$$

где N - число частиц, D - длина провода. Отсюда еще один вывод -

4. Появление СУБМИКРО шкалы

Малышев В.А. Почему течет ток: многочастичная одномерная модель. Теор. и мат. физика, 2008, т. 155, № 2, 301-311

Малышев В.А. Тонкая структура одномерной дискретной системы точек. Проблемы передачи информации, 2012, т. 48, № 3, с. 57-71

Малышев В.А. Аналитическая динамика одномерной системы частиц с сильным взаимодействием. Математические заметки, 2013, 92, № 1-2, 237-248

Malyshev V.A. Self-organized circular flow of classical point particles, Journal of Mathematical Physics, American Institute of Physics (United States), 2013, v. 54

Аксиомы нерелятивисткой классической физики - на интуитивном уровне их всего две
1. Силы или поля двигают частицы - Уравнение Ньютона для траекторий $x_i(t)$ частиц $i = 1, ..., N$

$$m_i \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = F_i$$

с начальными условиями $x_i(0), v_i(0) = \frac{dx_i}{dt}(0)$.
2. Каждая из этих частиц создает (излучает) поле согласно уравнениям Максвелла

Основной вопрос - какие силы F_i разрешены. Если любые, то так можно объяснить все что угодно. Получится неинтересная наука, где **на каждое явление свое уравнение.** И эта **язва** мало связанных между собой уравнений разрастается.
Одна из целей (пока недостижимая) матфизики - приблизиться к другой крайности. Именно, вывести как можно больше физических явлений из как можно меньшего числа уравнений.

Примем - разрешены только силы, которые излучают сами частицы, в **нерелятивистком** случае (релятивистский гораздо сложнее, ниже) это -
каждая частица создает свое электрическое и гравитационное поле **(закон Кулона** и **закон всемирного тяготения**). Они выглядят одинаково

$$F = \frac{c}{|x_1 - x_2|^2}$$

только константы разные. Именно в системе СИ (kg,m,s,C=кулон)

В гравитации две частицы с массами m_i, m_2 действуют друг на друга силой

$$F = G\frac{m_i m_2}{|x_1 - x_2|^2}$$

В электродинамике две частицы с зарядами q_i, q_2 действуют друг на друга силой

$$F = \epsilon_0^{-1}\frac{q_i q_2}{|x_1 - x_2|^2}$$

При этом $G, \epsilon_0 = 10^{-11}$, да и масса электрона много меньше его заряда, что в нормальных условиях гравитацией можно пренебречь.

Тогда **аксиомой** будет система N уравнения для N частиц, откуда надо найти $x_i(t)$

$$m_i \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = \epsilon_0^{-1} \sum_{j:j \neq i} \frac{q_1 q_2}{|x_i - x_j|^3}(x_i - x_j), i = 1, ..., N$$

Это и есть единая система уравнений из которой можно очень много вывести. Единственная проблема - это ОЧЕНЬ и ОЧЕНЬ сложно. Поэтому нужны упрощенные модели и приближения, но с четко формулируемыми ограничениями.

Простейшая модель субмикрошкалы в кулоновской среде

$N+1$ частиц с кулоновским отталкиванием ближайших соседей на отрезке $[0,1]$

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1$$

Устойчивая конфигурация одна, где частицы на **в точно** равных расстояниях друг от друга, то есть

$$x_k - x_{k-1} = \frac{1}{N}$$

Здесь две шкалы - макро (порядка 1) и микро (порядка N^{-1})

Пусть на частицы действует еще внешняя макросила $F(x)$ порядка 1, то есть на МАКРОШКАЛЕ. Тогда теорема - устойчивая конфигурация снова одна но

$$|x_k - x_{k-1} - \frac{1}{N}| = O(\frac{1}{N^2})$$

то есть изменение будет не на МИКРОШКАЛЕ (порядка N^{-1}) как ожидалось а на СУБМИКРОШКАЛЕ (порядка N^{-2}).

Malyshev V.A. Fixed points for one-dimensional particle systems with strong interaction. Moscow Mathematical Journal, v. 12, № 1.

Малышев В.А. Тонкая структура одномерной дискретной системы точек. Проблемы передачи информации, том 48, № 3, с. 57-71

(в последней статье есть и более низкие шкалы).

Откуда появляются другие силы кроме кулоновских

Они получаются когда каждая из двух взаимодействующих частиц состоит из нескольких точечных заряженных частиц. Известно что так можно получить диполи (задача двух тел). Неизвестно, можно ли получить достаточно сложные составные частицы без введения дополнительных аксиом.
Дополнительная аксиома - это уравнение Шредингера но опять же с кулоновским потенциалом. Это обеспечивает связанное состояние двух и более точечных заряженных частиц. . И между такими связанными состояниями будут силы типа **Леннарда-Джонса**.
В.А. Малышев, Р.А. Минлос. Об оценках потенциала взаимодействия между двумя атомами. Теоретическая и математическая физика, 2010, том 162, 3, 381-396.

Основная догма статистической физики (Больцман и другие) - изолированная система сходится к равновесию. Но что такое изолированная система. Идеально изолированную невозможно преставить - таких нет. Так система, "изолированная" стенками в действительности даже через стенки имеет слабый контакт с внешним миром. Больцман не был математиком, и что он имел в виду под изолированностью никто не знает. Но математики все понимают по своему, требуя крайней точности.
Именно, что изолированность означает в частности, что в уравнениях, описывающих систему, нет случайности и что уравнения гамильтоновы.

И возникли проблемы о
Сходимости к равновесию для гамильтоновой системы
например такой с произвольными силами

$$m_i \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = \sum_{j:j\neq i} F(x_i, x_j), i = 1, ..., N$$

Этим проблемам больше 100 лет. Вокруг возникло много науки (эргодическая теория динамических систем,...) но нет даже ни одного примера. До сих пор кто то говорит, что если все таки система **достаточно нелинейна** (**нелинейность** как пример фетиша в науке), то сходимость все таки будет

Однако, наоборот - много примеров, где сходимости нет
1, линейные системы, самый плохой в смысле сходимости
2. интегрируемые
3. близкие к ним (теория КАМ - Колмогорова-Арнольда-Мозера)
Однако доказано, что, даже для линейной системы, если выделить ОДНУ частицу и действовать на нее внешней случайной силой, то будет сходимость к равновесию.

Силы типа Леннарда Джонса уже очень богатый объект, где можно много сделать. Прежде всего они имеют минимум, а значит стационарные точки, около которых потенциал квадратичен

$$H(\psi) = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^2}{2} + U(q), U(q) = \frac{1}{2}(q, Vq)$$

и уравнения движения для N частиц в фазовом пространстве $R^{3N} \times R^{3N}$ точек $\psi = (q_1, p_1, ..., q_{3N}, p_{3N})$ линейны

$$\frac{dq_k}{dt} = p_k, \frac{dp_k}{dt} = -\sum_{l=1}^{N} V_{kl} q_l$$

для некоторой положительно определенной матрицы $V = (V_{ij})$.

К **одному** уравнению добавляем внешнюю силу

$$\frac{dp_1}{dt} = -\sum_{l\geq 2}^{N} V_{1l} q_l + F(t)$$

Остальные оставляем детерминированными. Два типа результатов
1. $F(t)$ - белый шум со сносом в ноль. Тогда для почти всех V (то есть для всех кроме меры ноль в пространстве всех матриоц V) имеет место сходимость к распределению Гиббса

2. столкновения частицы 1 со случайными внешними частицами, меняющие знак ее скорости
Тогда будет сходимость к мере Лиувилля на поверхности

$$\mathcal{M}_h = \{\psi \in L : H(\psi) = h\}$$

постоянной энергии.

Отсюда новая гипотеза
Полностью изолированных систем нет, но даже при минимальном контакте с внешним миром будет сходимость к равновесию.

Lykov A.A., Malyshev V.A. Liouville ergodicity of linear multi-particle hamiltonian system with one-marked particle velocity flips,. arxiv:1503.04531
Лыков А.А., Малышев В.А. О новом подходе к эргодической гипотезе Больцмана. Доклады РАН, 2015 (в печати).
Lykov A.A., Malyshev V.A. Convergence to Gibbs equilibrium - unveiling the mystery, Markov Processes and Related Fields, 2013, v. 19, № 4
Лыков А.А., Малышев В.А. Роль памяти в сходимости к инвариантной мере Гиббса. Доклады РАН, серия Математика, 2013, том 452, № 1, 17-20.
Лыков А.А., Малышев В.А., Музычка С.А. Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием. Теория вероятностей и ее применения, 2012, том 57, № 4.

Устойчивость цепочки молекул (аналогично для твердого тела)

В. А. Малышев, С. А. Музычка. Динамический фазовый переход в простейшей модели цепочки молекул. Теор. и матем. физика, 2014, 179, 1, 123-133.

Одномерная система N точечных частиц (молекул) одинаковой массы m, причем в начальный момент $t = 0$

$$0 = z_0(0) < z_1(0) = a < z_2(0) = 2a < \ldots < z_{N-1}(0) = (N-1)a \tag{1}$$

для некоторого $a > 0$. Динамика этой системы определяется гамильтонианом

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{k=1}^{N-1} V(z_k - z_{k-1}) - f z_{N-1}$$

искать окрестность $O(a)$ точки минимума такую, что при начальных данных (1) траектория никогда не выходит из $O(a)$, предполагая дополнительно, что в некоторой окрестности точки a потенциал имеет квадратичный вид динамику системы частиц во времени и получить хорошие оценки для функционала

$$A = A(N, l, f, \kappa, m) = \max_{1\le k, k+l \le N-1} \sup_{t\in(0,\infty)} |z_{k+l}(t) - z_k(t)|$$

Несмотря на очевидную простоту модели, основной результат настоящей статьи - оценка максимума (по всему бесконечному интервалу времени) отклонений от исходной «кристаллической» структуры - нетривиален и использует теоретико-числовые оценки. Дело в том, что хотя в нашей модели есть очевидная неподвижная точка, но так как модель гамильтонова, то никакой сходимости к этой точке нет. Отсюда задача - оценить насколько далеко траектория отходит от этой неподвижной точки. Мы начинаем с фиксированного числа N частиц и находим окрестность, из которой система НИКОГДА не выходит. Затем, устремляя $N \to \infty$. и делая скейлинг параметров, мы обнаруживаем, что есть фазовый переход, разделяющий область, где кристаллическая структура мало меняется на

Проблемы с объединением уравнений Максвелла и Лоренца

Есть система уравнений для частиц - сила Лоренца

$$F(x,t) = q(E(x,t) + \frac{1}{c}[\frac{dx}{dt}, H(x,t)])$$

где q - заряд частицы на которую действуют электрическая и магнитная напряженности E и H, и для полей - уравнения Максвелла в вакууме

$$divE = 4\pi\rho, divH = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \times H = -\frac{4\pi}{c}j$$

Примем - плотности зарядов и токи также создаются заряженными частицами с данными траекториями $x_k(t), k = 1, 2, .., N$

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{N} q_k \delta(x - x_k(t)),\ \ j(x) = \sum_{k=1}^{N} q_k v_k(t) \delta(x - x_k(t))$$

Оказывается что математически корректной теории корректной совместности этих уравнений не существует, хотя она есть и довольно проста для уравнений Лоренца и Максвелла в отдельности.
Летят несколько частиц, создают поля, которые действуют на них самих. Казалось бы можно так - по траекториям частиц найти поля, по полям траектории, и т.д. Сходится ли этот процесс - абсолютно не ясно. Надо, как и в математике, решать СОВМЕСТНУЮ систему ОДУ и УрЧП. К сожалению, никто не смог этого сделать. Хотя многие пробовали - в связи с проблемой электромагнитной массы и др.

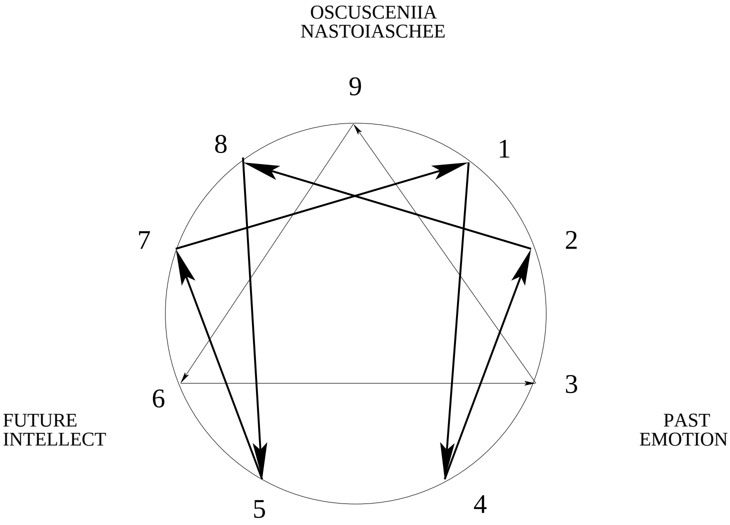
Это сделано для одномерной модели с волновым уравнением для поля и одной частицей
Малышев В.А., Пирогов С.А. Одномерная модель самодействия классической точечной частицы Доклады РАН, Математика, том 459, № 2.

МОГУТ ли быть АКСИОМЫ в СОЦИОЛОГИИ

———

Ответ - могут только когда поведение человека будет описываться **ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ** законами

Мне известна только одна система в психологии, которая двигалась в этом направлении - древняя наука, называемая ЭНЕАГРАММОЙ. В Россию, а потом в Европу она проникла в начале 20 века. Литература по ней не маленькая, но у университетской психологии другие интересы..


OSCUSCENIIA
NASTOIASCHEE
9
8
1
7
2
6
3
FUTURE
INTELLECT
PAST
EMOTION
5
4