Обратные задачи в проблеме экономических измерений

Шананин А.А.

Содержание доклада

- Введение. Почему экономические измерения стали проблемой. Новые задачи математической экономики в условиях глобализации.
- Проблема интегрируемости в теории экономических индексов. Непараметрический метод анализа структуры потребительского поведения.
- Проблема моделирования замещения производственных факторов. Модель распределения ресурсов с замещением производственных факторов на макро уровне. Агрегирование и постановка обратной задачи. Теоремы Бернштейна о характеризации преобразования Радона неотрицательных мер с носителем в конусе.
- Модель распределения ресурсов с замещением производственных факторов на микро уровне. Новые задачи интегральной геометрии.
- Задача об оценке эластичности замещения производственных факторов на микро уровне и её связь с исследованием комбинаторных структур.

Почему экономические измерения стали проблемой

- Бюро экономического анализа США признало в 2000 г. валовой внутренний продукт (ВВП) «одним из величайших изобретений XX столетия»
- ВВП и функция Гамильтона-Якоби в моделях экстенсивного экономического роста
- Стиглиц Дж., Сен А., Фитусси Ж.-П. Неверно оценивая нашу жизнь. Почему ВВП не имеет смысла? Доклад Комиссии по измерению эффективности экономики и социального прогресса.

Почему экономические измерения стали проблемой

- В ночь с 5 на 6 ноября 2010 г. статистическая служба Ганы впервые с 1993 года обновила веса, используемые при расчёте индексов цен, и ВВП Ганы вырос на 60%, в результате чего она официально перешла из разряда стран с «низкими» доходами в разряд стран с доходами «ниже среднего».
- В 2010 г. глава статистической службы Греции Андреас Георгиу был отдан под суд и обвинён в пренебрежении национальными интересами Греции. А.Георгиу сообщил новые данные о ВВП Греции, а получение греческим правительством финансовой помощи зависело от снижения отношения бюджетного дефицита к ВВП.
- В 1976 г. Великобритания, одна из ведущих промышленно развитых стран мира обратилась к МВФ за финансовой помощью. В последствие выяснилось, что официальная статистика завышала инфляцию и занижала ВВП. Ошибочная оценка повлияла на экономическую политику и результаты выборов в 1981 г., которые привели к власти консервативное правительство М.Тэтчер.

Задача о рационализируемости

$X = (X_1, \dots, X_m)$ – объемы потребления товаров

$P = (P_1, \dots, P_m)$ – цены на эти товары

$P(X) = (P_1(X), \dots, P_m(X))$ – обратные функции спроса

Φ_0 – класс непрерывных, вогнутых, положительно-однородных и положительных в $\operatorname{int} R_+^m$ функций

Определение. $P(X)$ *рационализируемы в классе* Φ_0, *если* $\exists$ *такая функция полезности* $F(X) \in \Phi_0$, *что*

$$X \in \operatorname{Argmax}\left\{F(Y) \mid \left\langle P(X), Y \right\rangle \le \left\langle P(X), X \right\rangle, Y = (Y_1, \dots, Y_m) \ge 0\right\}$$

Постановки задачи о рационализируемости

Предложение 1.

Пусть $\forall X > 0$ выполнено $\langle P(X), X \rangle > 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- Существуют $F(X) \in \Phi_0, Q(P) \in \Phi_0,$ такие что
$$\forall X > 0,\ \forall P \geq 0 \quad Q(P)F(X) \leq \langle P, X \rangle;$$
$$\forall X > 0 \qquad Q(P(X))F(X) = \langle P(X), X \rangle;$$
- Существует функция $F(X) \in \Phi_0,$ такая что $\forall X > 0$ справедливо
$$P(X) \in Q(P(X))\partial F(X)$$
где *Q(P)* – преобразование Янга[1)] функции *F(X)*
$$Q(P) = \inf \left\{ \frac{\langle P, X \rangle}{F(X)} \;\middle|\; X \geq 0, F(X) > 0 \right\};$$
- Существует $F(X) \in \Phi_0$, рационализирующая обратные функции спроса $P(X)$

[1)] Преобразование Янга инволютивно в классе Φ_0, т.е. двукратное применение переводит функцию в себя

Критерий рационализируемости – I

Определение. $F(X)$ *принадлежит классу* U_m *, если* $F(X) \in C(\mathbb{R}_+^m)$ *и в* $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m$ *выполнены следующие условия:*

1. $F(X) > 0 \quad \forall X > 0;$

2. $F(X) \in C^1(\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m);$

3. $F(\lambda X) = \lambda F(X) \quad \forall \lambda > 0, X > 0;$

4. $F'(X) > 0 \quad \forall X > 0;$

5. $F(X)$ *строго квазивогнута;*

6. $\forall Y > 0 \ \exists$ *хотя бы одно оптимальное на* $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m$ *решение*

$$\frac{\langle X, Y \rangle}{F(X)} \to \inf_{X > 0}$$

Критерий рационализируемости – II

Утверждение 1.

Пусть $P(X) \in C^1(\mathbb{R}^m_+)$. *Обозначим* $M = \{1, \ldots, m\}$.

$P(X)$ *рационализируемы в* U_m *тогда и только тогда, когда:*

1. $P(X) > 0 \quad \forall X > 0;$
2. $\forall i, j \in N, \quad \forall \lambda > 0, \ \forall X > 0 \qquad \dfrac{P_i(\lambda X)}{P_j(\lambda X)} = \dfrac{P_i(X)}{P_j(X)};$
3. $\forall X_1, X_2 > 0 : \ X_1 \neq \lambda X_2$ *ни при каких* $\lambda > 0$

$$\langle P(X_1), X_2 \rangle \langle P(X_2), X_1 \rangle > \langle P(X_1), X_1 \rangle \langle P(X_2), X_2 \rangle;$$

4. $\forall$ *различных* $i, j, k \in M \quad \forall X > 0$

$$P_i(X)\left(\frac{\partial P_j}{\partial X_k}(X) - \frac{\partial P_k}{\partial X_j}(X)\right) + P_j(X)\left(\frac{\partial P_k}{\partial X_i}(X) - \frac{\partial P_i}{\partial X_k}(X)\right) + P_k(X)\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(X) - \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(X)\right) = 0;$$

5. $\forall X \in \partial \mathbb{R}^m_+ \quad (M \setminus \{i \in M \mid X_i = 0\}) \cap \{j \in M \mid P_j(X) = 0\} \neq \varnothing.$

Индекс потребления и индекс цен
Теория выявленного предпочтения

Функция полезности $F(X)$ – *индекс потребления*

$$Q(P)=\inf_{X>0,F(X)>0}\left\{\frac{<P,X>}{F(X)}\right\}$$ – *индекс цен*

$$Q(P(X))F(X)=\langle P(X),X\rangle$$

Определение. $X^1 \in \mathbb{R}_+^m$ *выявленно предпочтительнее чем* $X^2 \in \mathbb{R}_+^m$ *(обозначается* $X^1 \succ X^2$*), если и только если*

$$\langle P(X^1),X^1\rangle \geq \langle P(X^1),X^2\rangle,\ \ X^1 \neq X^2.$$

Слабая аксиома. *Если* $X^1, X^2 \in \mathbb{R}_+^m$, $\langle P(X^1),X^1\rangle \geq \langle P(X^1),X^2\rangle$, $P(X^1) \neq P(X^2)$, *то* $\langle P(X^2),X^1\rangle > \langle P(X^2),X^2\rangle$.

Сильная аксиома и однородная сильная аксиома теории выявленного предпочтения

Определение. $X \geq 0$ *косвенно выявленно предпочтительнее, чем* $Y \geq 0$ *(обозначается* $X R Y$*), если и только если* $\exists X^1 \geq 0, \ldots, X^k \geq 0$, *что*

$$X = X^1 \succ X^2, X^2 \succ X^3, \ldots, X^{k-1} \succ X^k = Y.$$

Сильная аксиома. *Если* $X \geq 0, Y \geq 0$, $X R Y$, *то* $\langle P(Y), X - Y \rangle \geq 0$

Определение. $P(X)$ *удовлетворяют однородной сильной аксиоме теории выявленного предпочтения (ОСА), если* $\forall \{X^1, \ldots, X^T\} \in \mathbb{R}_+^m$

$$\langle P(X^1), X^2 \rangle \langle P(X^2), X^3 \rangle \ldots \langle P(X^T), X^1 \rangle \geq$$

$$\geq \langle P(X^1), X^1 \rangle \langle P(X^2), X^2 \rangle \ldots \langle P(X^T), X^T \rangle$$

Рационализируемость обратных функций спроса

Утверждение 2

Пусть $P(X) \geq 0,\ P(X) \in C(\mathbb{R}_+^m),\ \langle P(X), X \rangle > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$

Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. $P(X)$ *рационализируемы в классе* Φ_0.

2. $\exists$ *решение* $\lambda(X) > 0,\ \lambda(X) \in C(\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m)$ *системы*

$$\lambda(Y)\langle P(Y), X \rangle \geq \lambda(X)\langle P(X), X \rangle, \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}_+^m$$

3. $P(X)$ *удовлетворяют ОСА.*

Рационализируемость торговой статистики

$\{P^t, X^t\}_{t=0}^{T}$ – торговая статистика

$X^t = (X_1^t, \ldots, X_m^t)$ – объемы потребления товаров

$P^t = (P_1^t, \ldots, P_m^t)$ – цены на эти товары

Торговая статистика – значения обратных функций спроса в точках $X^t = (X_1^t, \ldots, X_m^t)$

Определение. *Торговая статистика называется рационализируемой, если ее можно продолжить до обратных функций спроса, рационализируемых в классе* Φ_0

Теорема Африата – Вериана

Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\exists$ *функция полезности вида* $F(X)=\min\lambda_t\langle P^t, X\rangle$ *рационализирующая торговую статистику* $\{P^t, X^t\}_{t=0}^T$, *т.е.*

$$X^t \in \operatorname{Argmax}\left\{ F(X) \mid \langle P^t, X\rangle \le \langle P^t, X^t\rangle,\ X \ge 0\right\},\quad t=\overline{0,T}$$

2) $\exists$ *решение* $(\lambda_0,\dots,\lambda_T)$ *системы линейных неравенств*

$$\lambda_\tau\langle P^\tau, X^t\rangle \ge \lambda_t\langle P^t, X^t\rangle, \lambda_t > 0,\quad \tau, t=\overline{0,T} \qquad (I)$$

3) $\{P^t, X^t\}_{t=0}^T$ *удовлетворяет однородной сильной аксиоме теории выявленного предпочтения (ОСА):* $\forall\ \{t_1,\dots,t_k\}\subset\{\overline{0,T}\}$

$$\langle P^{t_1}, X^{t_2}\rangle\langle P^{t_2}, X^{t_3}\rangle\dots\langle P^{t_k}, X^{t_1}\rangle \ge \langle P^{t_1}, X^{t_1}\rangle\langle P^{t_2}, X^{t_2}\rangle\dots\langle P^{t_k}, X^{t_k}\rangle$$

Непараметрический метод построения индекса Конюса-Дивизиа

Предложение 2

Пусть $F(X) = \min_{\tau=0,T} \lambda_\tau \left\langle P^\tau, X \right\rangle$, где $\lambda_0 > 0, \ldots, \lambda_T > 0$ удовлетворяют (I), а

$$Q(P) = \inf \left\{ \frac{\langle P, Y \rangle}{F(Y)} \;\middle|\; Y \geq 0, F(Y) > 0 \right\}$$

Тогда

$$Q(P^t) = 1/\lambda_t \qquad F(X^t) = \lambda_t \left\langle P^t, X^t \right\rangle$$

Такой метод вычисления индексов называется **непараметрическим методом**.

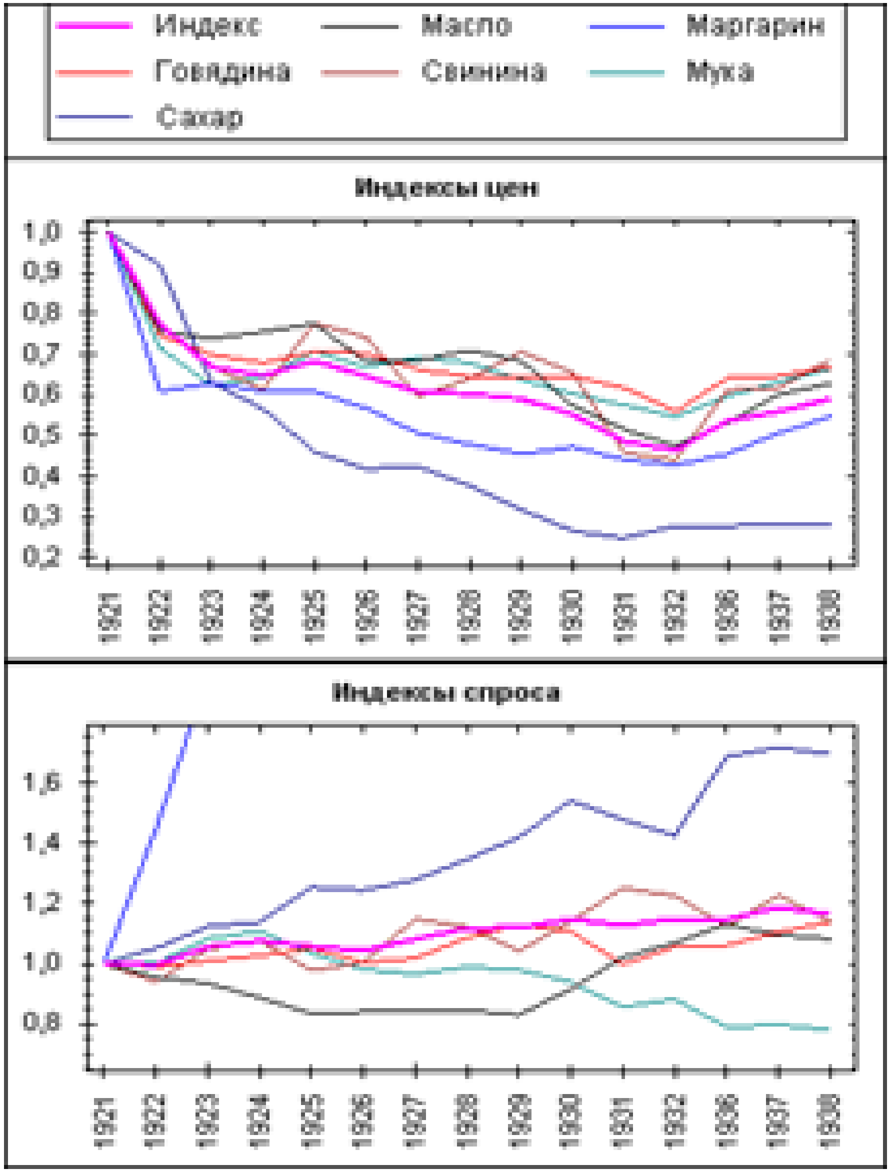
Шведская статистика 1921-1938 гг.

• Колебания индекса Конюса-Дивизиа сглажены по сравнению с исходными данными;

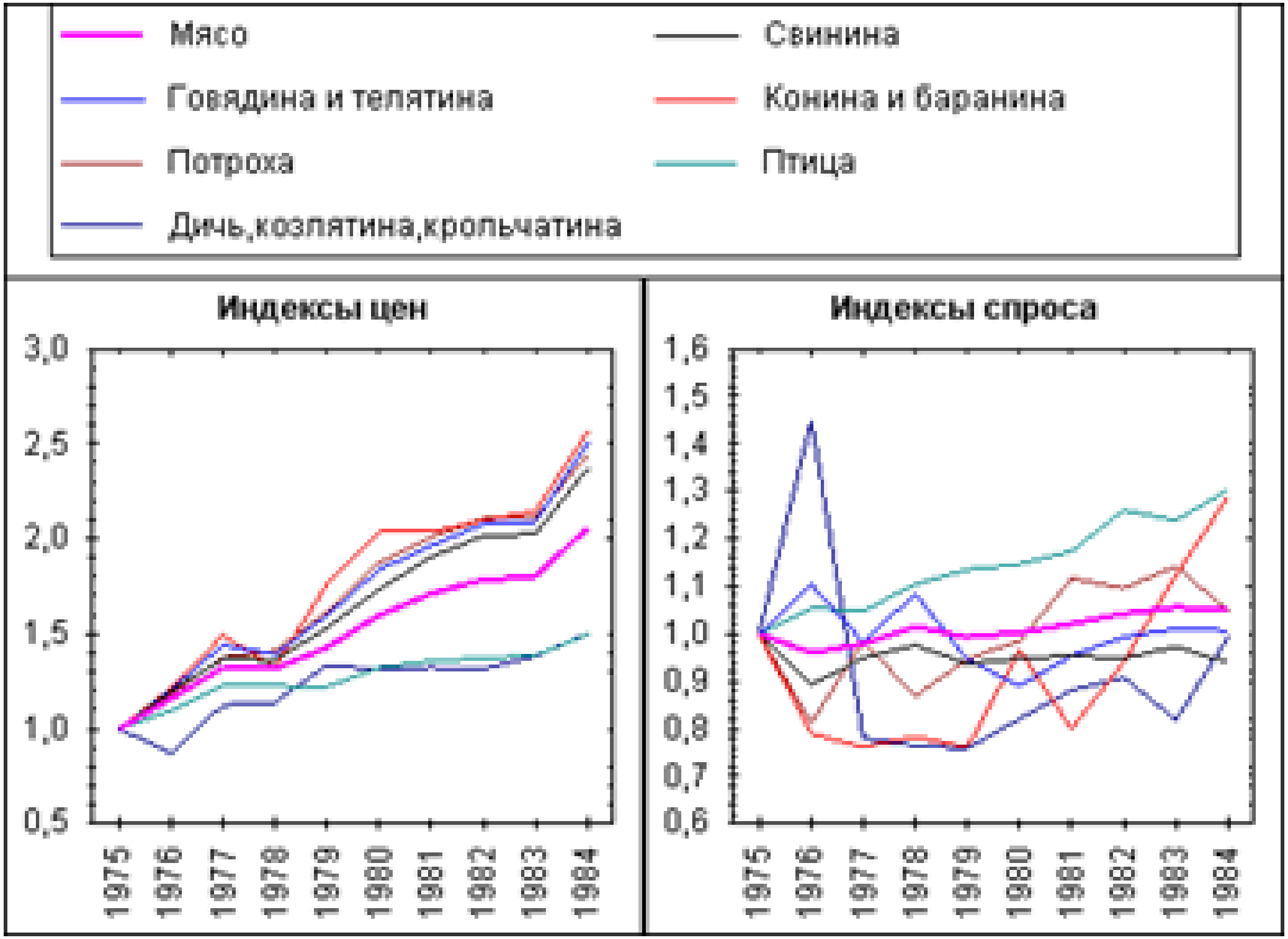
• 1933-1935: нарушение условий рационализируемости;

• Последствия Великой Экономической Депрессии: появление новых потребностей и товаров (холодильники);

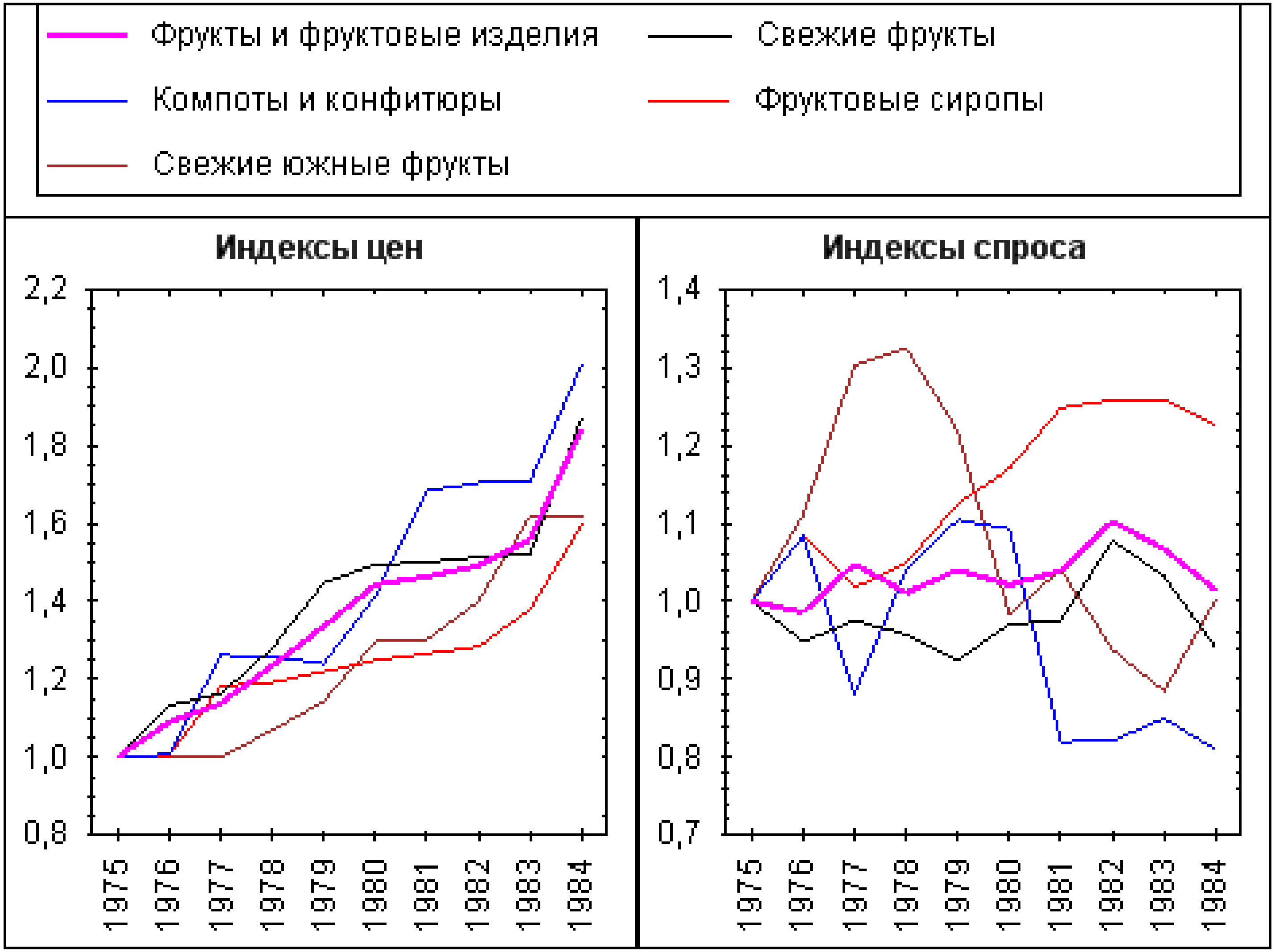
• Связь системных перестроек экономики и нарушения условий рационализируемости выявлена непараметрическим методом.



Индексы цен и потребления. Пример: Венгрия 1975-1984.



Индексы цен и потребления. Пример: Венгрия 1975-1984.



Венгрия: классификация товаров

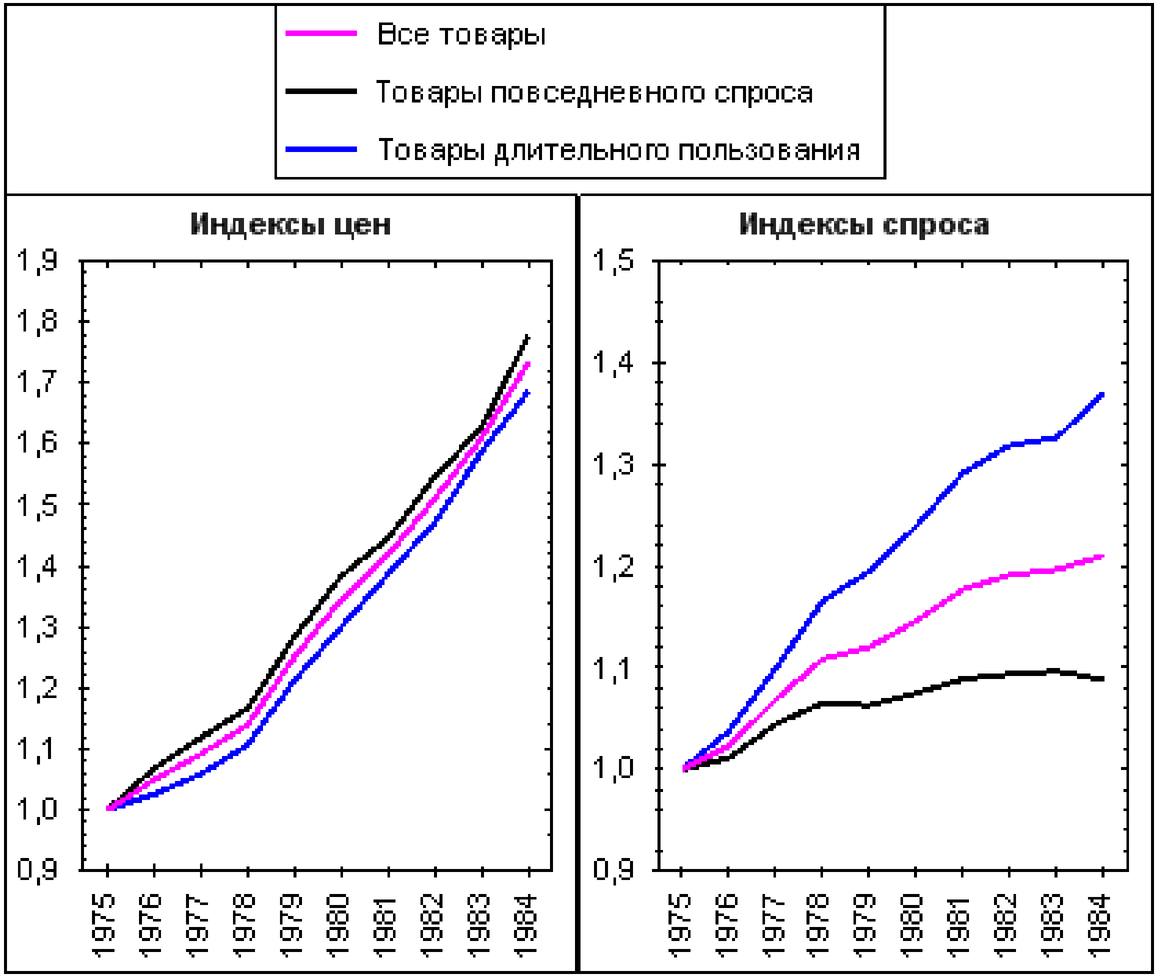
Номер	Группа	Кол-во товаров
1	Продовольственные товары	49
2	Напитки	15
3	Табачные изделия	3
4	Одежда	31
5	Жилищное обслуживание	5
6	Отопление, энергия в быту	12
7	Бытовое оснащение	30
8	Здравоохранение, гигиена	7
9	Транспорт, информация	11
10	Образование, культура, спорт, отдых	23
11	Прочие статьи потребления	10

Товарные группы различаются длительностью службы товаров. Первые три класса – товары повседневного спроса – имеют время потребления месяц, «Одежда» – около года, оставшиеся классы – 5-10 лет (товары и услуги длительного пользования).

Изменение структуры потребления

- Появление рыночных отношений на потребительском рынке;

- Сдвиг потребления в пользу товаров длительного пользования;



Дерево экономических индексов.

Сегментация рынков.

$$\mathbf{X} = (\chi_1, \dots, \chi_k, \varsigma) \geq 0$$

$$\chi_i = (X_{i_1}, \dots, X_{i_{k_i}}) : \exists\ F_i(\chi_i) \in \Phi_0$$

$$\varsigma = (X_{j_1}, \dots, X_{j_z})$$ – все остальные товары

$$\mathbf{F(X)} = \mathbf{F}\left(F_1(\chi_1), \dots, F_k(\chi_k), \varsigma\right)$$

$$// \ F_i(\chi_i) = F_i\left(F_{i1}(\chi_{i1}), \dots, F_{il}(\chi_{il}), \varsigma_i\right)$$

- Все товары
  - Товары повседневного спроса
    - Прод товары
      - Фрукты и фруктовые изделия
      - Мясо
    - Напитки
  - Товары длительного пользования

Статистика Венгрии. Отделимость

- Классификация, используемая товароведами, оказалась неадекватной;
- Процессам, которые происходили в стране, соответствует другая классификация, основанная на характерном времени потребления;

- Группа товаров "Одежда" не удовлетворяет ОСА, но удовлетворяет ОСА, если добавить еще один агрегированный товар "Продукты питания".

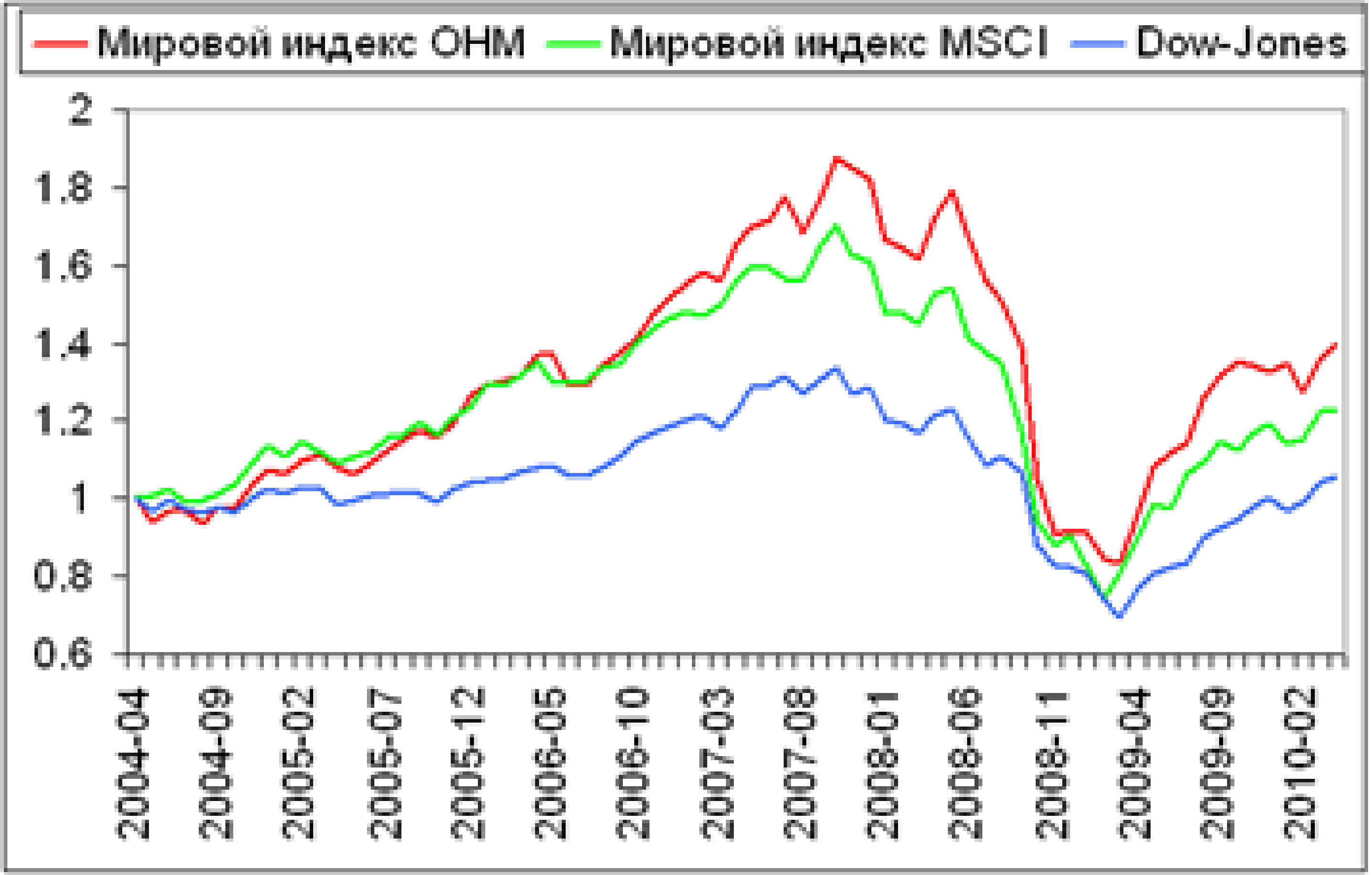
Статистика фондового рынка

- P_t - цены акций, X_t - объемы торгов в штуках
- 21 крупнейшая мировая биржа:
  - Нью-Йоркская фондовая биржа, Лондонская фондовая биржа,
  - Фондовая биржа Токио,
  - Фондовая биржа Франкфурта,
  - Фондовая биржа Гонконга,
  - Фондовая биржа Шанхая...

Проблемы:

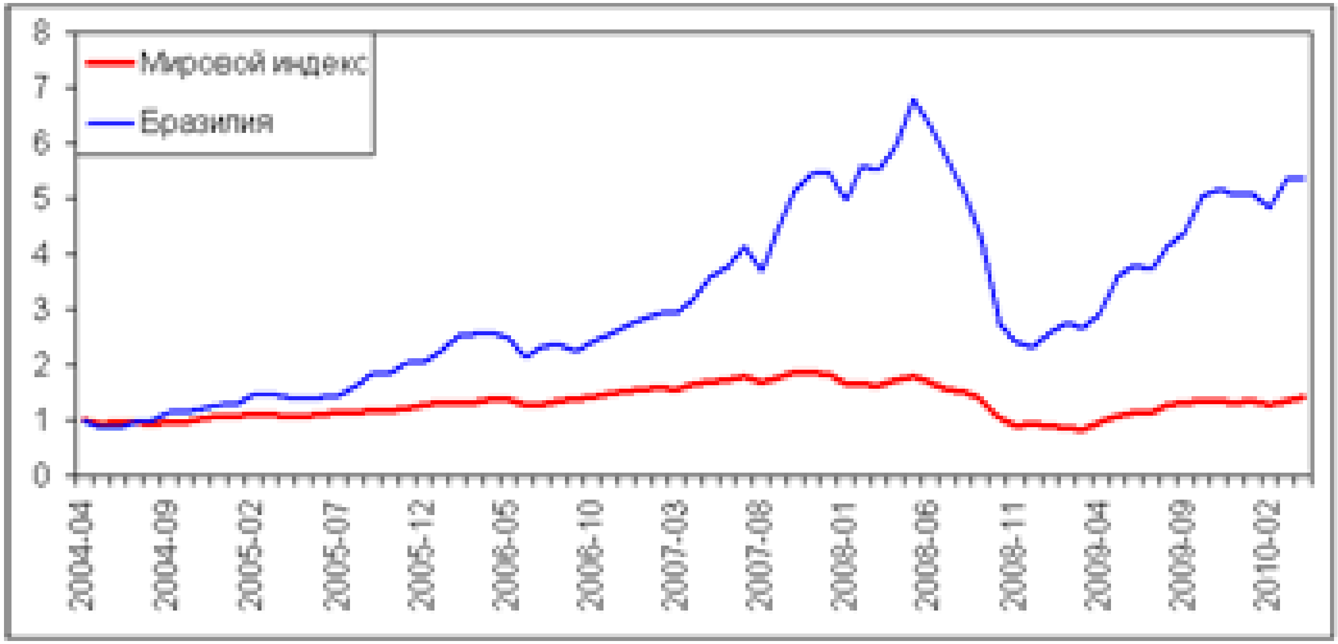
- Разное число перепродаж крупных пакетов акций, различная активность спекулянтов влияет на рационализируемость;
- Биржи торгуются в разных валютах.

Мировой индекс



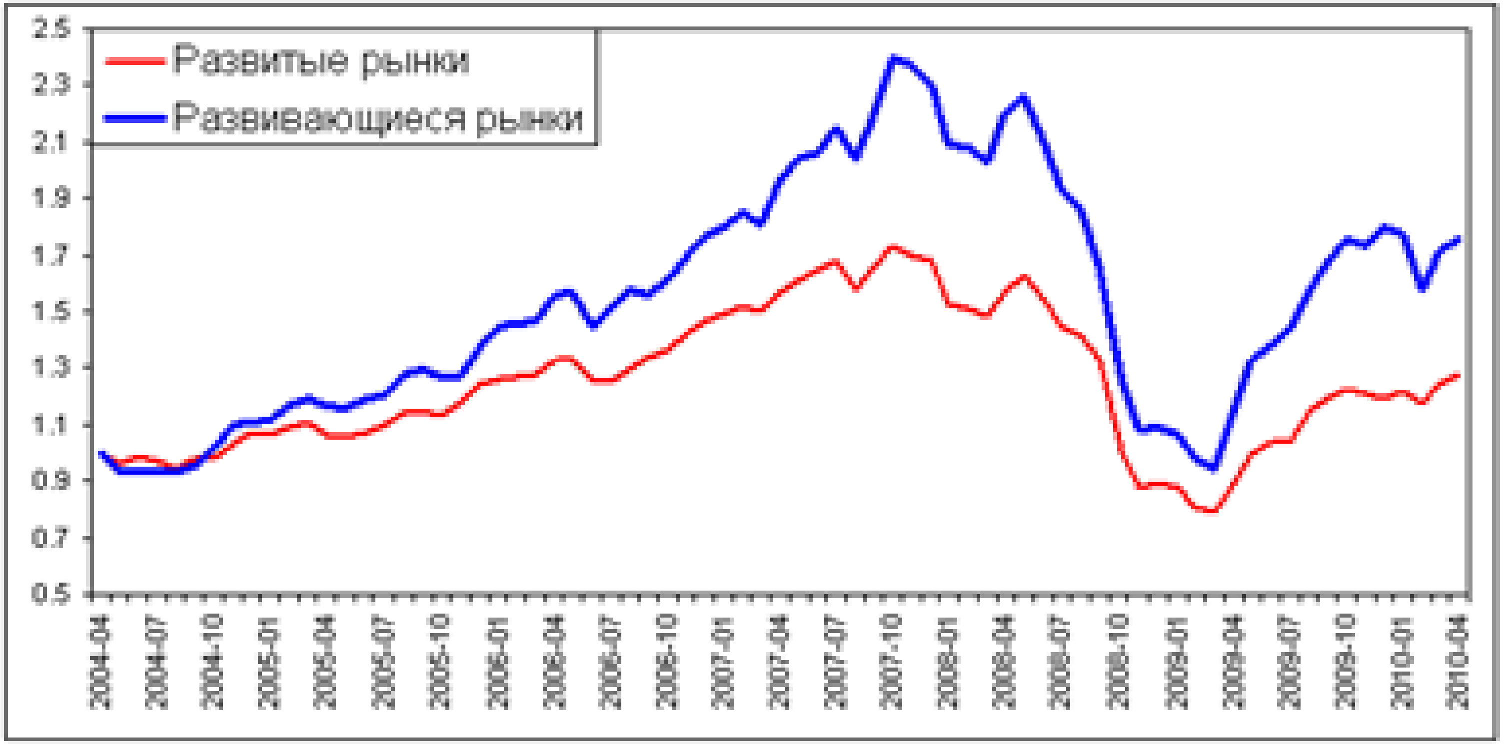
Бразилия

Бразильский рынок обладает очень высокой волатильностью. Например, по сравнению с мировым индексом.



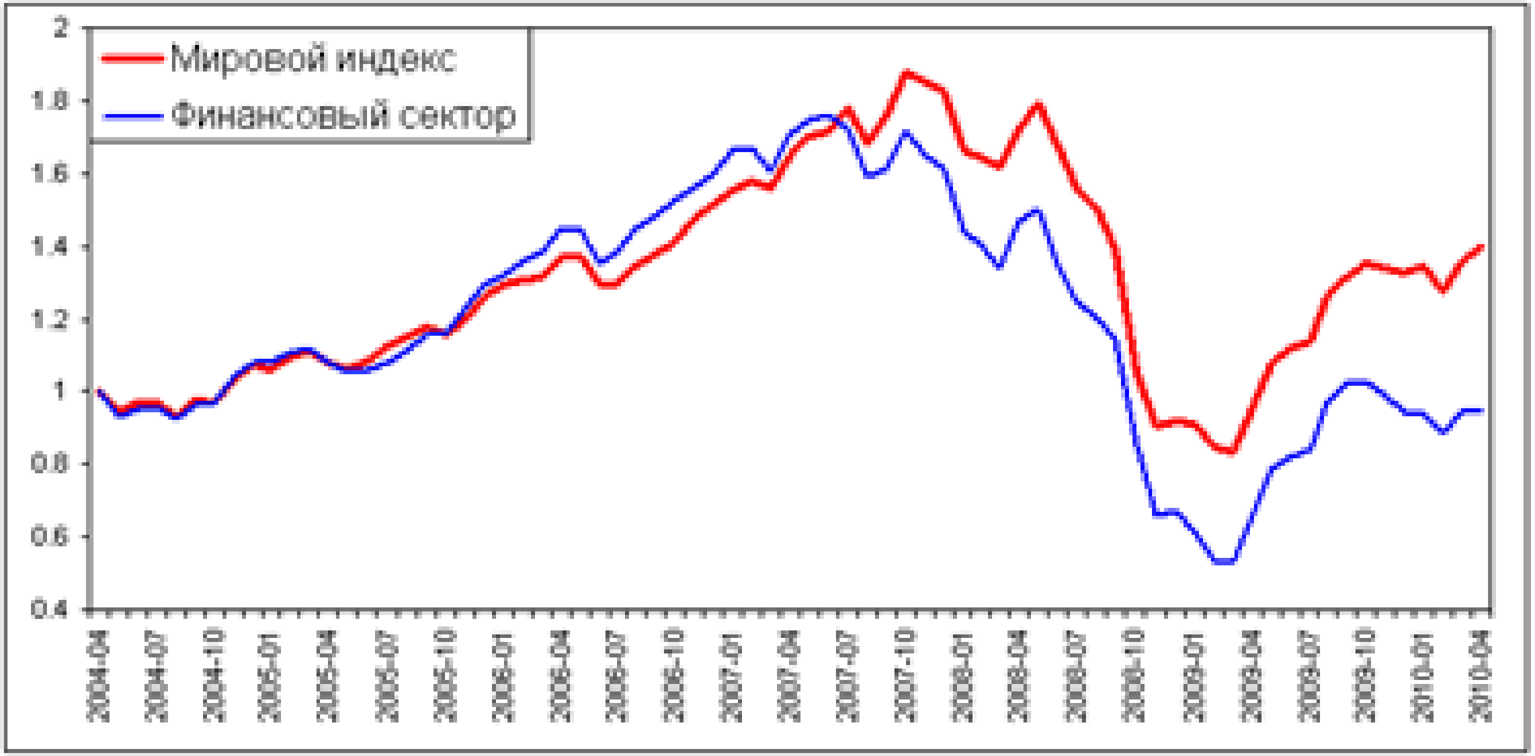
Развитые и развивающиеся рынки

В целом развивающиеся рынки более волатильны.



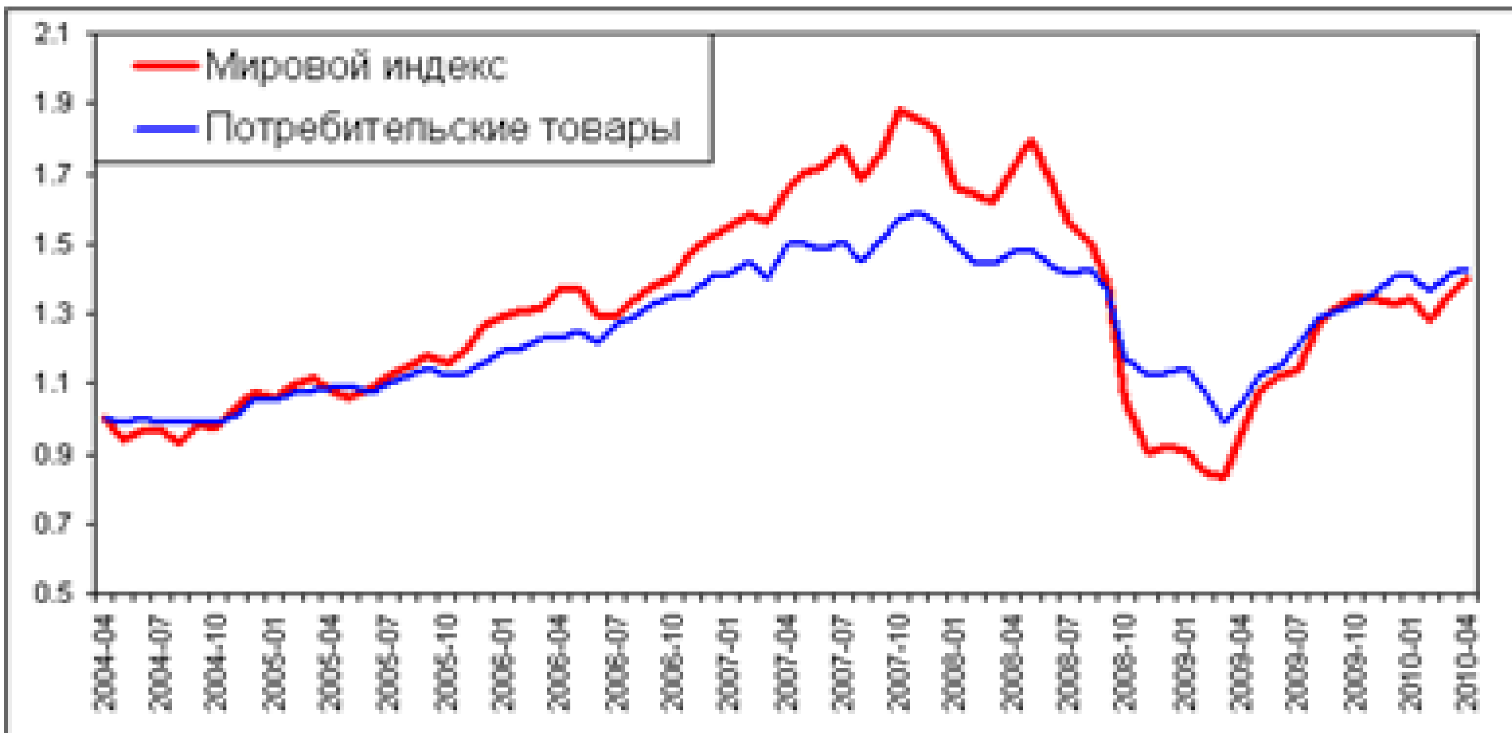
Финансовый сектор

ОНМ позволяет строить индексы по отраслям. Анализ показал, что наиболее сильно от кризиса 2008 года пострадал финансовый сектор.



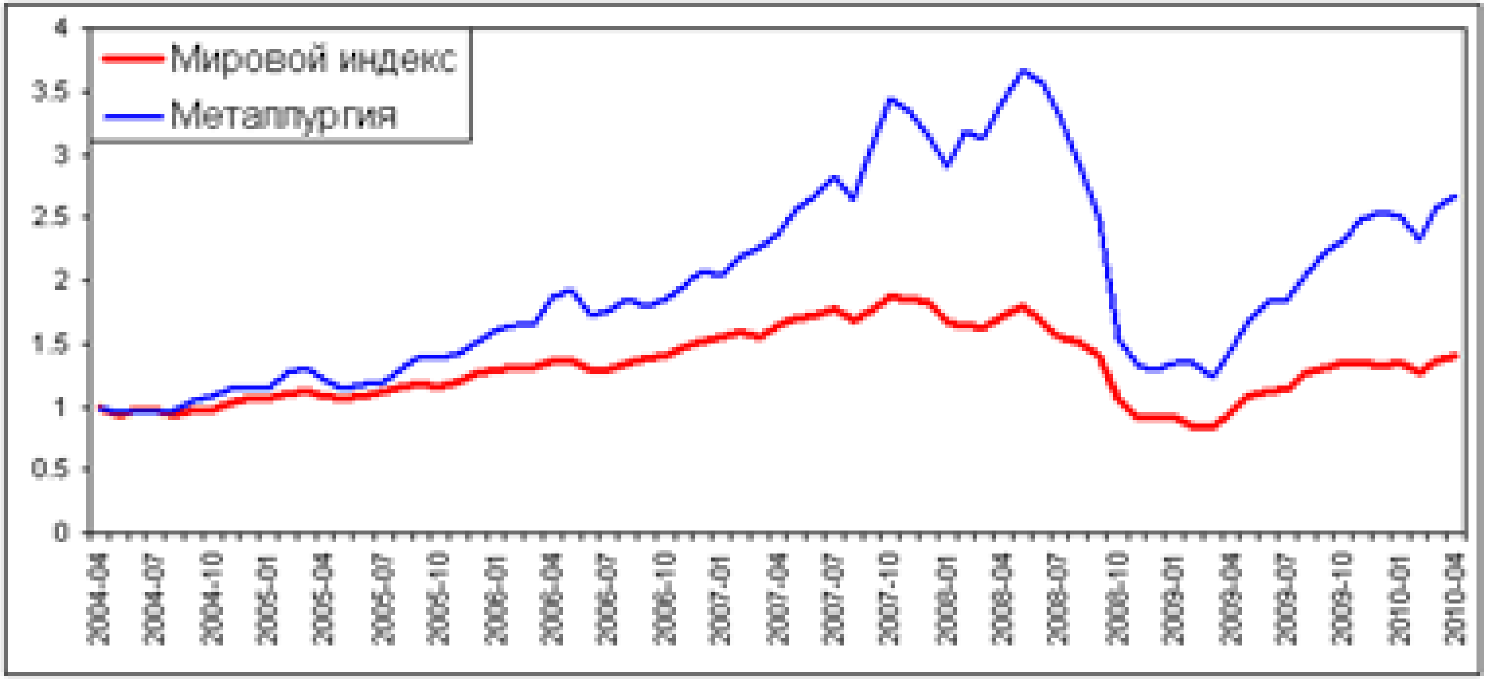
Компании-производители потребительских товаров

Компании-производители потребительских товаров оказали стабилизирующее влияние на рынок.



Металлургия

Металлургические компании продемонстрировали наибольший рост перед кризисом.



Нарушение условий интегрируемости

$$F(X) = \left(F_1(X), \dots, F_k(X)\right); \; Q(p) = \left(Q_1(p), \dots, Q_k(p)\right)$$

$$\forall X \geq 0, p \geq 0 \qquad \sum_{j=1}^{k} Q_j(p) F_j(X) \leq pX;$$

$$\forall X \geq 0 \qquad \sum_{j=1}^{k} Q_j\left(P(X)\right) F_j(X) = P(X) X;$$

Нарушение условий интегрируемости

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j\left(P(X)\right)\frac{\partial F_j(X)}{\partial X_i} = P_i(X) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(X)\, dX_i = \sum_{j=1}^{k} Q_j\left(P(X)\right) dF_j(X)$$

Агрегированные обратные функции спроса

$$R(F)=\left(R_1(F),\ldots,R_k(F)\right)$$

$$\forall X\geq 0 \qquad Q\left(P(X)\right)=R\left(F(X)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m}P_i(X)\,dF_i(X)=\sum_{j=1}^{k}R_j\left(F(X)\right)dF_j(X)$$

Класс дифференциальной формы

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} P_i(X)\, dX_i$$

$$\omega_1 = \alpha, \omega_2 = d\alpha, \omega_3 = \alpha \wedge d\alpha, \ldots, \omega_{2k} = (d\alpha)^k, \omega_{2k+1} = \alpha \wedge (d\alpha)^k, \ldots$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} P_i(X)\, dX_i = 0, \\ \sum_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\partial P_i(X)}{\partial X_j} - \dfrac{\partial P_j(X)}{\partial X_i} \right) dX_j = 0 \, (i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

Закон Хикса

$$\forall\left(v_1,\ldots,v_m\right)\neq 0,\ \textit{такого что}\sum_{i=1}^{m}P_i\left(X\right)v_i=0,$$

$$\textit{справедливо неравенство}\quad\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial P_i\left(X\right)}{\partial X_j}v_iv_j<0.$$

Определение класса функций

$F(X) \in A_m$ *в точке* X^0, *если* $\exists$ *окрестность* $U(X^0)$ *точки* X^0, *такая что*

1. $F(X^0) > 0$,

2. $F(X) \in C^2(U(X^0))$,

3. $\forall \lambda > 0, X \in U(X^0)$, *таких что* $\lambda X \in U(X^0)$ *справедливо* $F(\lambda X) = \lambda F(X)$,

4. $\dfrac{\partial F(X^0)}{\partial X_i} > 0$,

5. $\forall (v_1, \ldots, v_m) \neq 0$ *такого, что* $\sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial F(X^0)}{\partial X_i} v_i = 0$,

справедливо неравенство $\sum_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 F(X^0)}{\partial X_i \partial X_j} v_i v_j < 0$.

Теорема А

Предположим, что класс α *в окрестности* X^0 *равен k,*

функции $P(X)$ *n раз непрерывно дифференцируемы* $(n \geq 3)$

и удовлетворяют закону Хикса. Тогда существуют функции

$F(X) = (F_1(X), \ldots, F_k(X))$ *из класса* A_m *в окрестности* X^0 *такие, что*

1. *в окрестности* X^0 *выполняется* $\alpha = \sum_{j=1}^{m} R_j(F(X))\, dF_j(X)$,

2. *агрегированные обратные функции спроса* $R(F)$ $(n-2)$ *раза непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $F(X^0)$, $R(F(X^0)) > 0$, *удовлетворяют закону Хикса и условиям отделимости*

$$\left(\forall \lambda > 0,\ F \text{ и } \lambda F \text{ из окрестности } F(X^0) \text{ справедливо } \frac{R_i(\lambda F)}{R_j(\lambda F)} = \frac{R_i(F)}{R_j(F)}\ (i, j = 1, \ldots, m)\right).$$

Следствие

Пусть $R(F)$ *функции, построенные в теореме и* $P\left(Y(p)\right) \equiv p$.

Положим $Q(p) = R\left(F\left(Y(p)\right)\right)$.

Тогда существует окрестность U *точки* $P\left(X^0\right)$, *в которой* $Q(p)$ *положительны, непрерывно дифференцируемы и* $Q(\lambda p) = \lambda Q(p)$ *для* $\lambda > 0$, $p \in U$, $\lambda p \in U$.

Теорема В

Пусть в некоторой окрестности X^0 *класс* α *равен* ρ, *обратные функции* $P(X)$ *спроса бесконечнодифференцируемы и удовлетворяют закону Хикса. Тогда в некоторой окрестности* $P(X^0)$ *справедливо*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{s} Q_j(P(X))dF_j(X),$$

где $s = \left[\frac{\rho+1}{2}\right]$, *а функции* $Q_1(p),\ldots,Q_s(p)$ *и* $F_1(X),\ldots,F_s(X)$ *принадлежат классу* A_m *в окрестности точек* $P(X^0)$ *и* X^0 *соответственно.*

Вариационные неравенства

$X^0 \in E$ *является решением вариационного неравенства* $\left(E, P\left(X\right)\right)$, *если* $\forall X \in E$ *справедливо*

$$P\left(X^0\right)X^0 \ge P\left(X^0\right)X.$$

Агрегирование вариационных неравенств (с критериями теоремы B)

Пусть

1. E *выпуклое подмножество* R_{+}^{m},

такое что если $X \in E, 0 \le Y \le X$, *то* $Y \in E$;

2. X^{0} *решение вариационного неравенства* $\left(E, P\left(X\right)\right)$;

3. $Q_{1}\left(p\right), \ldots, Q_{s}\left(p\right)$ *и* $F_{1}\left(X\right), \ldots, F_{s}\left(X\right)$ *функции,*

построенные в теореме B и определённые в R_{+}^{m},

4. $Q\left(P\left(X^{0}\right)\right) > 0$;

5. $\Gamma = \left\{Z \in R_{+}^{s} \middle| \exists X \in E : Z \le F\left(X\right)\right\}$.

Тогда $F\left(X^{0}\right)$ *оптимальная по Парето точка* Γ.

Агрегирование вариационных неравенств (с критериями теоремы А)

Пусть

1. E *выпуклое подмножество* R_+^m,
такое что если $X \in E, 0 \le Y \le X$, *то* $Y \in E$;

2. X^0 *решение вариационного неравенства* $(E, P(X))$;

3. $F_1(X), \dots, F_k(X)$ *функции,*
построенные в теореме А и определённые в R_+^m,

4. $R(F(X^0))$ *агрегированные обратные функции спроса,*
удовлетворяющие закону Хикса, условиям отделимости и
$R(F(X^0)) > 0$;

5. $\Gamma = \{Z \in R_+^k \mid \exists X \in E : Z \le F(X)\}$.

Тогда $F(X^0)$ *оптимальная по Парето точка* Γ.

Неоклассическая модель потребительского поведения

M – *количество социальных групп*

$u_\alpha(X) \in U_m, \ \alpha = \overline{1, M}$ – *функции полезности этих групп*

$\varphi_\alpha(P)$ – *доходы групп,* $I(P) = \sum_{\alpha=1}^{M} \varphi_\alpha(P)$

Утверждение 3. *Пусть* $X^\alpha(P) = (X_1^\alpha(P), \dots, X_m^\alpha(P))$

$$X_i^\alpha(P) = \operatorname{Arg\,max}\left(u_\alpha(X) : \langle P, X \rangle \le \varphi_\alpha(P), X \ge 0\right)$$

Тогда

$$X_i^\alpha(P) = \frac{\varphi_\alpha(P)}{q_\alpha(P)} \frac{\partial q_\alpha(P)}{\partial P_i} \left(i = \overline{1, m}\right)$$

где $q_\alpha(P) = \inf\limits_{\{X \ge 0 | u_\alpha(X) > 0\}} \dfrac{\langle P, X \rangle}{u_\alpha(X)}$ – *индекс цены с точки зрения группы* α

Интегрируемость и распределение доходов

$$X(P)=\sum_{\alpha} X^{\alpha}(P)$$

$$\omega=\sum_{i} X_i(P)\,dP_i=\sum_{\alpha=1}^{M}\frac{\varphi_{\alpha}(P)}{q_{\alpha}(P)}\,dq_{\alpha}(P)$$

Утверждение 4. *Если* $\omega=F(X(P))dQ(P)$, *где* $F(X)\in U_m, Q(P)\in U_m$

$$Q(P)=\inf_{\{X\geq 0|F(X)>0\}}\frac{\langle P,X\rangle}{F(X)},$$

то существует $\Phi(q)\in U_M$, *такая что* $Q(P)=\Phi(q(P))$

$$\varphi_{\alpha}(P)=I(P)\frac{q_{\alpha}(P)}{\Phi(q(P))}\frac{\partial\Phi(q(P))}{\partial q_{\alpha}}.$$

Функция общественного благосостояния Бергсона

$$W(u_1,\dots,u_M) = \inf_{\{q\geq 0 \mid \Phi(q)>0\}} \frac{\sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha u_\alpha}{\Phi(q)}$$

Связь функции благосостояния Бергсона с индексом продукта

Утверждение 5. *Пусть* $\Phi(q) \in U_M, \varphi_\alpha(P) = I(P)\psi_\alpha(q(P))$, *где*

$$\psi_\alpha(P) = \frac{q_\alpha(P)}{\Phi(q)} \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, M}.$$

Тогда индекс продукта $F(X)$ *не меньше, чем оптимальное значение функционала в задаче*

$$\begin{cases} W\left(u_1(X^1), \ldots, u_M(X^M)\right) \to \max, \\ X^1 + \ldots + X^M = X, \quad X^\alpha \geq 0 \quad (\alpha = \overline{1, M}) \end{cases} \qquad (\#)$$

Если $X_i = \sum_\alpha \frac{\psi_\alpha(q)}{q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ *и* $X^1(X), \ldots, X^M(X)$ *- решение (#), то*

$$F(X) = W(u_1(X^1(X)), \ldots, u_M(X^M(X))) \quad \text{и} \quad u_\alpha = \frac{1}{\Phi(q)} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} = \frac{\psi_\alpha(q)}{q_\alpha}, \; q_\alpha = \Phi(q) \frac{\partial W(u(q))}{\partial u_\alpha}$$

$$\gamma = \sum_{\alpha=1}^{M} u_\alpha(q) dq_\alpha = W(u(q)) d\Phi(q), \; \varepsilon = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha(u) du_\alpha = \Phi(q(u)) dW(u)$$

Нарушение условий интегрируемости и социальная структура общества

$$\gamma = \sum_{\alpha=1}^{M} u_\alpha(q)dq_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\kappa} W_\beta(u(q))dV_\beta(q),$$

$$u_\alpha(q) = \sum_{\beta=1}^{\kappa} W_\beta(u(q))\frac{\partial V_\beta(q)}{\partial q_\alpha}$$

$$\varepsilon = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha(u)du_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\kappa} V_\beta(q(u))dW_\beta(u)$$

$$q_\alpha(u) = \sum_{\beta=1}^{\kappa} V_\beta(q)\frac{\partial W_\beta(u(q))}{\partial u_\alpha}$$

Дискретная постановка задачи о классе дифференциальной формы спроса

Задана торговая статистика $\left\{P^t, X^t\right\}_{t=0}^{T}$

Требуется представить

$$X^t = \sum_{j=1}^{k} Y_j^t, t = 0, \ldots T,$$

$$Y_j^t \in \operatorname{Arg\,max}\left\{F_j\left(X\right) \middle| \left\langle P^t, X\right\rangle \le \left\langle P^t, Y_j^t\right\rangle, X \ge 0\right\}, t = 0, \ldots, T; j = 1, \ldots, k$$

Случай k=2: смешанная задача линейного программирования с булевскими переменными

Совместность системы

$$Y_1^t + Y_2^t = X^t, t = 0,...,T;$$

$$Y_j^t \geq 0, t = 0,...,T; j = 1,2;$$

$$F_j^s - F_j^t \leq z_j^{st}, s \neq t, t = 0,...,T; s = 0,...,T; j = 1,2;$$

$$F_j^s - F_j^t \geq z_j^{st} - 1, s \neq t, t = 0,...,T; s = 0,...,T; j = 1,2;$$

$$\left\langle P^s, X_j^s - X_j^t \right\rangle - 2z_j^{st} \left\langle P^s, X^s \right\rangle < 0, s \neq t, t = 0,...,T; s = 0,...,T; j = 1,2;$$

$$\left\langle P^t, X_j^t - X_j^s \right\rangle + z_j^{st} \left\langle P^t, X^t \right\rangle \leq \left\langle P^t, X^t \right\rangle, s \neq t, t = 0,...,T; s = 0,...,T; j = 1,2;$$

$$z_j^{st} \in \left\{0,1\right\} \ s \neq t, t = 0,...,T; s = 0,...,T; j = 1,2.$$

Описание данных (расчёты Н.Н.Клемашева)

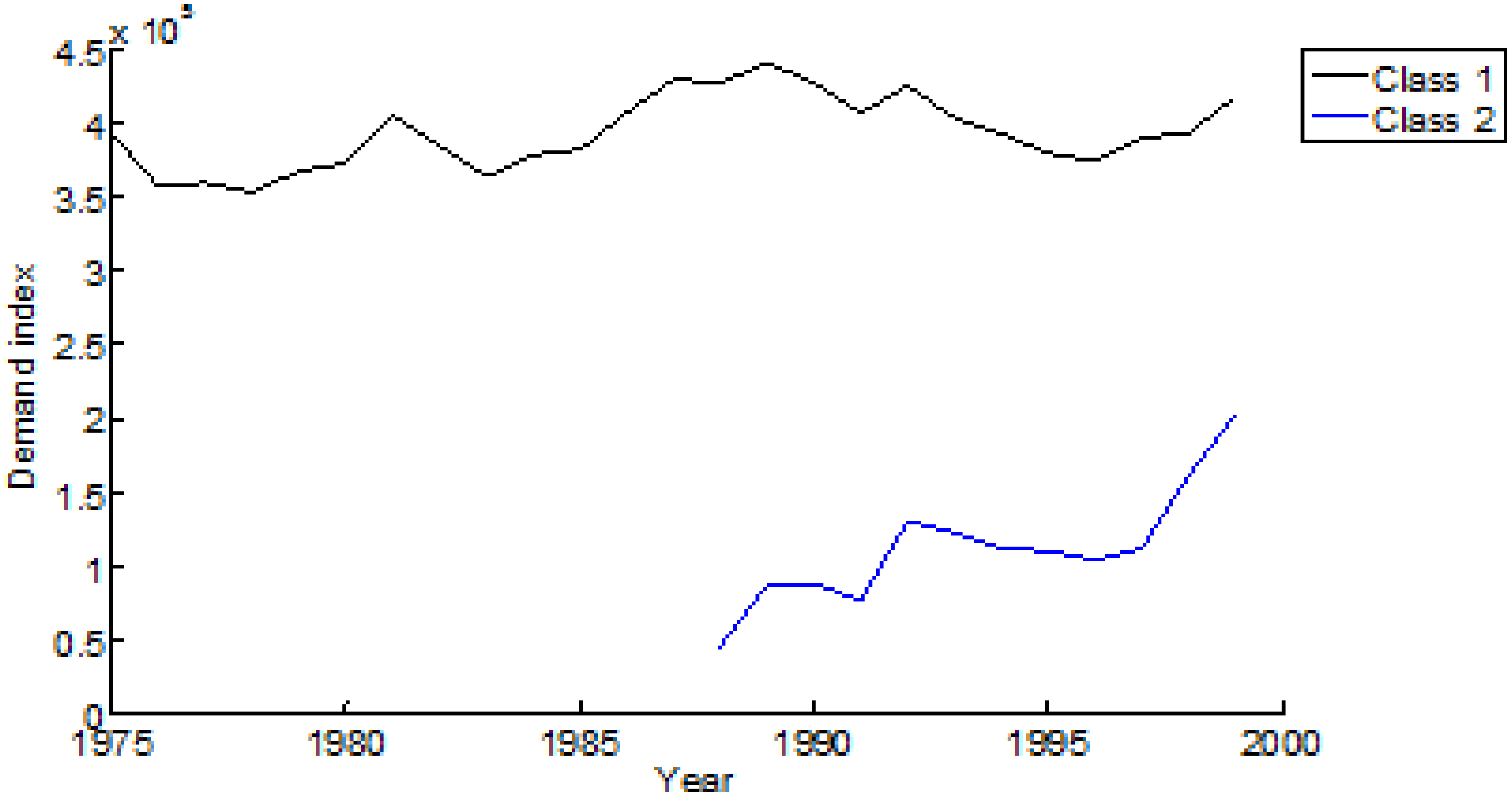
- Бюджетная статистика расходов домашних хозяйств в Великобритании за 1975 – 1999 годы;
- Номенклатура содержит 68 товарных групп;
- Отчеты от 6441 до 7525 домашних хозяйств;
- Источник информации о расходах и ценах – дополнительные материалы к статье Blundell R., Browning M., Crawford I. (Econometrica, 2008).

Пример – товарные группы

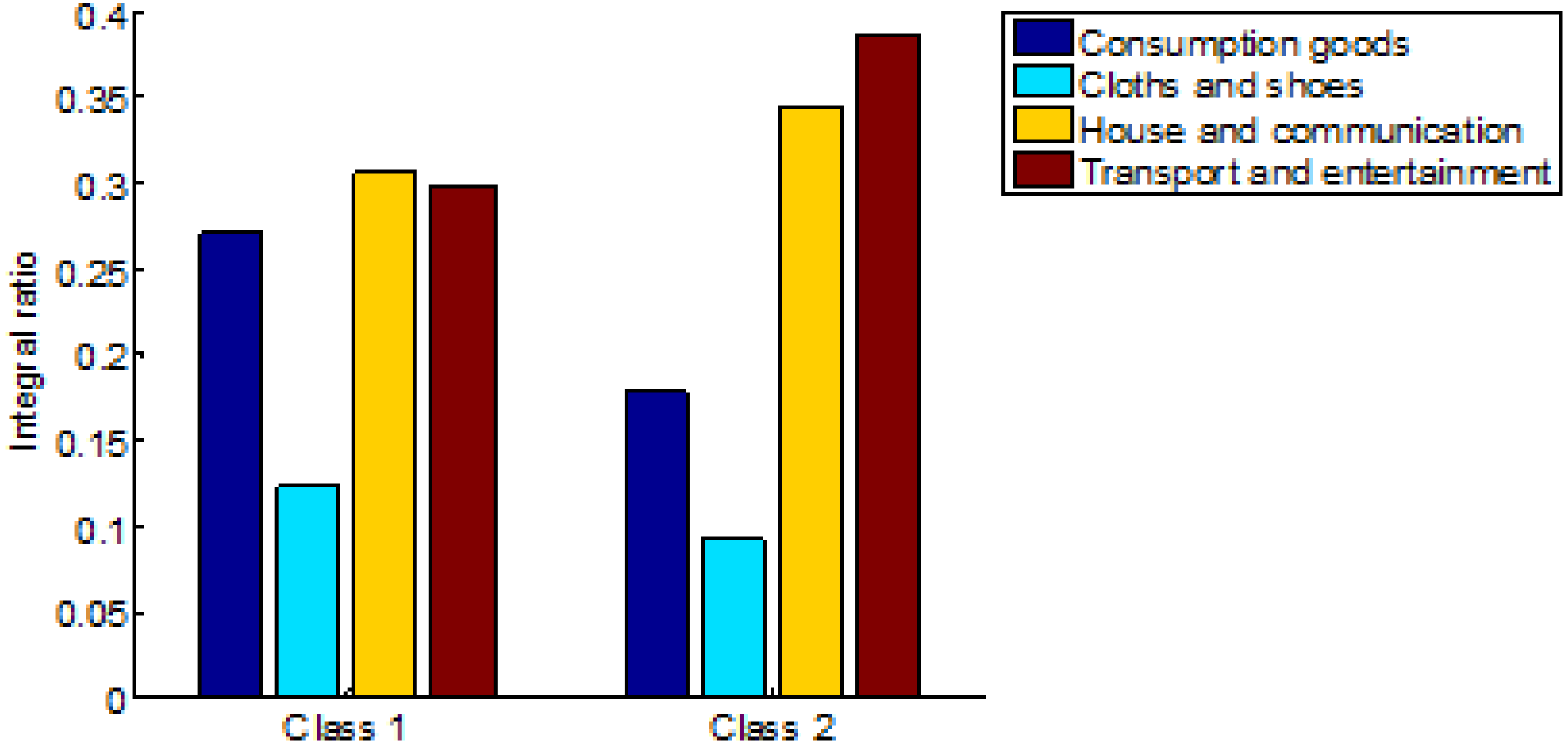
- Продукты питания (30 видов товаров)
- Одежда и обувь (5 видов товаров)
- Жильё и связь (16 видов товаров и услуг)
- Транспорт и развлечения (13 видов товаров и услуг)

Пример – два класса

Пример – индексы потребления классов



Пример – структура потребления



Пример – структура потребления

Товарные группы	Класс 1	Класс 2
Продукты питания	0.2712	0.17835
Одежда и обувь	0.12304	0.092714
Жильё и связь	0.3067	0.34348
Транспорт и развлечения	0.29906	0.38546

Модель Хаутеккера-Йохансена

- $x = (x_1, ..., x_n)$ -технология;
- $\mu(dx)$ -неотрицательная мера, задающая распределение мощностей по технологиям;

- $l = (l_1, ..., l_n)$ - вектор производственных затрат текущего пользования;
- $u(x)$ - коэффициент загрузки мощности;

- $F(l)$ - производственная функция, т.е. зависимость выпуска от затрат производственных факторов.

Задача распределения ресурсов в модели Хаутеккера - Йохансена

$$
(1)\begin{cases}
\int\limits_{R_+^n} u(x)\mu(dx) \to \max \\
\int\limits_{R_+^n} xu(x)\mu(dx) \le l, \\
0 \le u(x) \le 1.
\end{cases}
$$

Обобщённая лемма Неймана - Пирсона

- Если $\boldsymbol{l} \geq \mathbf{O}$, то задача (1) имеет решение.
- Если $u_0(x)$ решение задачи (1), то существуют неравные нулю одновременно множители Лагранжа $p_0 \geq 0, p = (p_1, ..., p_n) \geq 0$ такие, что

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 \ \text{для почти всех по мере } \mu(\bullet) \ x \ \text{таких, что } p_0 < px; \\ 1 \ \text{для почти всех по мере } \mu(\bullet) \ x \ \text{таких, что } p_0 > px; \end{cases}$$

$$p_j \left(l_j - \int\limits_{R_+^n} x_j u_0(x) \mu(dx) \right) = 0 \ \ (j = 1, ..., n).$$

- Если $p_0 > 0, p = (p_1, ..., p_n) \geq 0, l = \int\limits_{R_+^n} x\theta(x)\mu(dx)$, то

$u(x) = \theta(p_0 - px)$ является решением задачи (1).

Двойственность производственной функции и функции прибыли

- Функция прибыли

$$\Pi\left(p, p_0\right) = \int_{R_+^n} \left(p_0 - px\right)_+ \mu\left(dx\right), \qquad (2)$$

- Производственная функция $F\left(l\right)$ является вогнутой, монотонно

,

неубывающей, непрерывной на R_+^n.

$$\Pi\left(p, p_0\right) = \sup_{l \geq 0}\left(p_0 F\left(l\right) - pl\right),$$

$$F\left(l\right) = \frac{1}{p_0} \inf_{p \geq 0}\left(\Pi\left(p, p_0\right) + pl\right).$$

Агрегирование

- $F_0\left(X^0\right)$ положительно однородная, вогнутая, положительная, непрерывная на R_+^n функция полезности;
- $q_0\left(p\right)$ индекс цен.

$$q_0\left(p\right)=\inf_{\left\{X^0\geq 0 \middle| F_0\left(X^0\right)>0\right\}}\frac{pX^0}{F_0\left(X^0\right)},$$

$$F_0\left(X^0\right)=\inf_{\left\{p\geq 0 \middle| q_0\left(p\right)>0\right\}}\frac{pX^0}{q_0\left(p\right)}.$$

- $X^j=\left(X_1^j,...,X_m^j\right)$ - поставки в j отрасль продукции других отраслей,
- $l^j=\left(l_1^j,...,l_n^j\right)$ - поставки в j отрасль первичных ресурсов.
- $F_j\left(X^j,l^j\right)$ - производственная функция j отрасли.

Задача распределения ресурсов (нелинейный межотраслевой баланс)

$l = \left(l_1, \ldots, l_n\right)$ суммарные поставки первичных ресурсов.

$$
(3) \begin{cases}
F_0\left(X^0\right) \to \max \\
F_j\left(X^j, l^j\right) \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i, \quad \left(j = 1, \ldots, m\right) \\
\sum_{j=1}^{m} l^j \leq l, \\
X^0 \geq 0, X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0.
\end{cases}
$$

Равновесные рыночные механизмы

Пусть $l > 0$. Для того, чтобы набор векторов $X^0, X^1, ..., X^m, l^1, ..., l^m$, удовлетворяющий ограничениям задачи (3), являлся её решением необходимо и достаточно, чтобы существовали $p_0 > 0, p = \left(p_1, ..., p_m\right) \geq 0, s = \left(s_1, ..., s_n\right) \geq 0$ такие, что

$$X^0 \in Arg\max\left\{p_0 F_0\left(\tilde{X}\right) - p\tilde{X} \,\middle|\, \tilde{X} \geq 0\right\},$$

$$\left(X^j, l^j\right) \in Arg\max\left\{p_j F_j\left(\tilde{X}, \tilde{l}\right) - p\tilde{X} - s\tilde{l} \,\middle|\, \tilde{X} \geq 0, \tilde{l} \geq 0\right\}, \left(j = 1, ..., m\right)$$

$$p_j\left(F_j\left(X^j, l^j\right) - \sum_{i=0}^{m} X_j^i\right) = 0, \left(j = 1, ..., m\right)$$

$$s_k\left(l_k - \sum_{j=1}^{m} l_k^j\right) = 0\left(j = 1, ..., m\right).$$

Агрегированное макро описание

$$\Pi_j(s,p) = \sup_{\tilde{X}\ge 0, \tilde{l}\ge 0}\left(p_j F_j\left(\tilde{X}, \tilde{l}\right) - p\tilde{X} - s\tilde{l}\right)$$ функция прибыли j отрасли.

$F^A(l)$ - агрегированная производственная функция.

Вариационный принцип (двойственная задача)

$$\Pi^A(s,p_0) = \min\left\{\sum_{j=1}^{m}\Pi_j(s,p)\middle| p\ge 0, s\ge 0, q_0(p)\ge p_0\right\}.$$

$\Pi^A(s,p_0)$ - агрегированная функция прибыли.

Постановка обратной задачи

$$\Pi^A(s, p_0) = \sup_{l \ge 0}\left(p_0 F^A(l) - sl\right),$$

$$F^A(l) = \frac{1}{p_0}\inf_{s \ge 0}\left(\Pi^A(s, p_0) + sl\right).$$

Найти неотрицательную меру $\mu_A(\bullet)$ с носителем в R_+^n, такую, что

$$\Pi^A(s, p_0) = \int_{R_+^n} (p_0 - sx)_+ \, \mu_A(dx).$$

Связь с задачами интегральной геометрии

$$\frac{\partial^2 \Pi^A(s, p_0)}{\partial p_0^2} = \int\limits_{sx=p_0} \mu_A(dx)$$

$$\int\limits_{R_+^n} e^{-sx}\mu(dx) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} d_\tau\left(\frac{\partial \Pi^A(s,\tau)}{\partial \tau}\right)$$

Теорема единственности (Г.М.Хенкин, А.А.Шананин)**.**

Пусть заряд $\mu(\bullet)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{R_+^n} e^{-A\|x\|}|\mu|(dx) < \infty \text{ для некоторого } A > 0, \qquad (4)$$

$$\int\limits_{R_+^n} (p_0 - sx)_+ \mu(dx) = 0 \text{ для любых } p_0 > 0, s \in K,$$

где K – открытый конус в R_+^n. Тогда $\mu(\bullet) = 0$.

Теорема о характеризации (Г.М.Хенкин, А.А.Шананин)

Функция $\Pi(s, p_0)$ представима в виде

$$\Pi(s, p_0) = \int\limits_{R_+^n} (p_0 - sx)_+ \, \mu(dx) \; при \; (s, p_0) \in R_+^{n+1},$$

где $\mu(\bullet)$ неотрицательная мера с носителем в R_+^n, удовлетворяющая условию (4) тогда и только тогда, когда

1) $\Pi(s, p_0)$ положительно однородная, выпуклая функция на R_+^{n+1}, причём при фиксированном $s \in R_+^n$ мера $\partial^2 \Pi(s, \tau) / \partial \tau^2$ экспоненциально убывает при $\tau \to +\infty$;

2) функция $G(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} d_\tau \left(\dfrac{\partial \Pi^A(s, \tau)}{\partial \tau} \right) \in C^\infty(R_+^n)$ и для некоторого

открытого конуса $\Gamma \subset \operatorname{int} R_+^n$ и некоторого $s \in \Gamma$ при любых $\lambda > 0$,

$\xi^1 \in \Gamma, \ldots, \xi^k \in \Gamma, k = 1, 2, \ldots$

$$(-1)^k D_{\xi^1} \ldots D_{\xi^k} G(\lambda s) \geq 0, \; где \; D_\xi = \sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial s_j} \; для \; \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Пример 1

Пусть *n=2*, производственная функция типа CES

$$F_{CES}\left(l_1,l_2\right)=\left(\alpha_1 l_1^{-\rho}+\alpha_2 l_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}},\ где\ \alpha_1>0,\alpha_2>0,\rho\geq 1,0<\gamma<1.$$

Тогда функция прибыли равна

$$\Pi_{CES}\left(s_1,s_2,p_0\right)=\gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left(1-\gamma\right)p_0^{\frac{1}{1-\gamma}}\left(\alpha_1^{\frac{1}{1+\rho}}s_1^{\frac{\rho}{1+\rho}}+\alpha_2^{\frac{1}{1+\rho}}s_2^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{\gamma(1+\rho)}{\rho(1-\gamma)}}$$

При $\rho>-1$ существует распределение мощностей по технологиям, соответствующее этим функциям.

Пример 2

Пусть $m = 2, n = 2, F_0\left(X_1^0, X_2^0\right) = \min\left(X_1^0, X_2^0\right),$

$$\mu_1(dx) = k_0\delta(x - z), z = (z_1, z_2),$$

$$\mu_2(dx) = k_1\delta\left(x - y^1\right) + k_2\delta\left(x - y^2\right), y^j = \left(y_1^j, y_2^j\right), j = 1, 2,$$

$$k_1 + k_2 > k_0, y_1^1 > y_1^2, y_2^1 > y_2^2.$$

Тогда

$$\Pi^A(s, p_0) = \max\left\{(k_0 - k_2)_+\left(p_0 - s\left(z + y^1\right)\right)_+ + \min(k_0, k_2)\left(p_0 - s\left(z + y^2\right)\right)_+,\right.$$

$$\left.\min(k_0, k_1)\left(p_0 - s\left(z + y^1\right)\right)_+ + (k_0 - k_2)_+\left(p_0 - s\left(z + y^2\right)\right)_+\right\}.$$

Обозначим $K_1 = \left\{s \in R_+^2 \middle| sy^2 \le sy^1\right\}, K_2 = \left\{s \in R_+^2 \middle| sy^1 \le sy^2\right\}.$

Получаем $\Pi^A(s, p_0) = \max\limits_j \Pi_j(s, p_0), \Pi_j(s, p_0) = \int\limits_{R_+^n} (p_0 - sx)_+ \mu_j(dx),$

$$\Pi^A(s, p_0) = \Pi_j(s, p_0) \text{ } при \text{ } s \in K_j; \; R_+^n = \bigcup_j K_j,$$

$$G(s) = \max_j G_j(s), G_j(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} d_\tau\left(\frac{\partial \Pi_j(s, \tau)}{\partial \tau}\right).$$

Теорема о стабильных соответствиях (А.В.Карзанов, А.А.Шананин)

Пусть $X=\left\{x^1,...,x^m\right\}\subset R_+^n, Y=\left\{y^1,...,y^m\right\}\subset R_+^n$ и С конус в R_+^n.

Определение. Биекцию $\gamma : X\to Y$ назовём С-стабильным соответствием, если для любых $x^i\in X, x^j\in X, p\in C$ из $px^i<px^j$ следует, что $p\gamma\left(x^i\right)\le p\gamma\left(x^j\right)$.

Теорема. Для того, чтобы биекция $\gamma : X\to Y$ была С-стабильным соответствием необходимо и достаточно, чтобы для любых $x^i\in X, x^j\in X$

если $x^j\ne x^i, x^j-x^i\in C^*$, то $\gamma\left(x^j\right)-\gamma\left(x^i\right)\in C^*$;

если $x^j-x^i\notin C^*,\ x^i-x^j\notin C^*$, то существуют такие числа $\lambda\ge 0,\mu\ge 0,\lambda+\mu>0$, что $\lambda\left(x^j-x^i\right)=\mu\left(\gamma\left(x^j\right)-\gamma\left(x^i\right)\right)$.

Модель отрасли с замещением производственных факторов на микро уровне

$f(u)$ положительно однородная первой степени, вогнутая, непрерывная функция на R_+^n, положительная на $\operatorname{int} R_+^n$.
Параметры технологии задаются вектором $x = (x_1, ..., x_n)$.

Производственная функция на микро уровне $f\left(\dfrac{u_1}{x_1}, ..., \dfrac{u_n}{x_n}\right)$

Примеры: леонтьевская функция с постоянными пропорциями $f(u) = \min(u_1, ..., u_n)$ соответствует производственной функции на микро уровне в модели Хаутеккера – Йохансена;
CES функция

$$f(u) = \left(u_1^{-\rho} + ... + u_n^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} = u_1 \oplus_\rho ... \oplus_\rho u_n, \rho \geq -1.$$

Задача распределения ресурсов с замещением производственных факторов на микро уровне

$$
(5)\quad \begin{cases}
\int\limits_{R_+^n} \min\left(1,\ f\left(\dfrac{u_1(x)}{x_1},\dots,\dfrac{u_n(x)}{x_n}\right)\right)\mu(dx) \to \max\limits_{u(x)} \\
\int\limits_{R_+^n} u_j(x)\,\mu(dx) \le l_j,\ j = 1,\dots,n; \\
u(x) = \left(u_1(x),\dots,u_n(x)\right) \ge 0.
\end{cases}
$$

Положим $q(p) = \inf\limits_{\{u \ge 0 | f(u) > 0\}} \dfrac{pu}{f(u)},$

$$
p \circ x = (p_1 x_1,\dots,p_n x_n),\ \pi(x,p,p_0) = \left(p_0 - q(p \circ x)\right)_+ .
$$

Исследование задачи (5)

- Если $l \geq 0,$ то задача (5) имеет решение в классе вектор – функций $u(x)$ с интегрируемыми по мере $\mu(\bullet)$ компонентами.
- Для того, чтобы распределение ресурсов $u(x) = \left(u_1(x), ..., u_n(x)\right)$ удовлетворяющее ограничениям в задаче (5), было её оптимальным решением необходимо, а при $l > 0$ достаточно, чтобы существовали такие не равные нулю одновременно числа $p_0 \geq 0, p = (p_1, ..., p_n) \geq 0,$ что,

$$p_j \left(l_j - \int\limits_{R_+^n} u_j(x) \mu(dx) \right) = 0 \ \ (j = 1, ..., n),$$

$u(x) = 0$ при почти всех по мере $\mu(\bullet), x \in R_+^n,$ таких, что $p_0 < q(p \circ x),$
$f(u(x)), p_0 - pu(x) = \pi(x, p, p_0)$ при почти всех по мере $\mu(\bullet), x \in R_+^n$ таких, что $p_0 > q(p \circ x).$

Двойственность производственной функции и функции прибыли в модели с замещением производственных факторов на микро уровне

- Функция прибыли

$$\Pi(p, p_0) = \int_{R_+^n} \left(p_0 - q(p \circ x)\right)_+ \mu(dx), \qquad (6)$$

- Производственная функция $F(l)$ является вогнутой, монотонно

,

неубывающей, непрерывной на R_+^n.

$$\Pi(p, p_0) = \sup_{l \geq 0} \left(p_0 F(l) - pl\right),$$

$$F(l) = \frac{1}{p_0} \inf_{p \geq 0} \left(\Pi(p, p_0) + pl\right).$$

Пример 3

Пусть $m = 2, n = 2, q\left(p_1, p_2\right) = p_1^{\nu} p_2^{1-\nu}, где\, 0 < \nu < 1,$

$$\mu_j\left(dx\right) = x_1^{\alpha_1^j - 1} x_2^{\alpha_2^j - 1}, \alpha_i^j > 1\left(i, j = 1, 2\right).$$

Тогда $\Pi_j\left(s, p_j\right) = A_j \dfrac{p_j^{\alpha_1^j + \alpha_2^j + 1}}{s_1^{\alpha_1^j} s_2^{\alpha_2^j}},\ A_j > 0, \left(j = 1, 2\right),$

$$\Pi^A\left(s, p_0\right) = B \frac{p_0^{\alpha_1^A + \alpha_2^A + 1}}{s_1^{\alpha_1^A} s_2^{\alpha_2^A}}, B > 0,$$

где $\alpha_j^A = \dfrac{\nu\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1\right)\alpha_j^1 + \left(1 - \nu\right)\left(\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + 1\right)\alpha_j^2}{\nu\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1\right) + \left(1 - \nu\right)\left(\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + 1\right)}, \left(j = 1, 2\right).$

Всегда существует $\mu^A\left(dx\right) = b x_1^{\alpha_1^A} x_2^{\alpha_2^A}, где\ b > 0.$

Характеризация преобразования (6) (А.Д.Агальцов)

Обозначим

$$c=\left(c_1,\ldots,c_n\right)\in \operatorname{int} R_+^n, z=\left(z_1,\ldots,z_n\right), x^{z-I}=x_1^{z_1-1}\ldots x_n^{z_n-1}, x^{-z}=x_1^{-z_1}\ldots x_n^{-z_n},$$

$$\rho_q\left(z\right)=\Gamma\left(z_1\right)\ldots\Gamma\left(z_n\right)\Gamma\left(z_1+\ldots+z_n\right)\Bigg/\left(\int\limits_{R_+^n} x^{z-I}e^{-q\left(x\right)}dx_1\ldots dx_n\right).$$

Тогда

$$G\left(s\right)=\int\limits_{R_+^n} e^{-sx}\mu\left(dx\right)=\left(2\pi i\right)^{-n}\int\limits_{c+iR_+^n} s^{-z}\rho_q\left(z\right)\left(\int\limits_{R_+^n} p^{z-I}\Pi\left(p,1\right)dp_1\ldots dp_n\right)dz_1\ldots dz_n.$$

Задача об оценке эластичности замещения производственных факторов на микро уровне

Исходные данные: $\left\{ p^t, p_0^t, y^t \,\middle|\, t = 1,\dots,T \right\}$, где p^t вектор цен на производственные факторы, p_0^t цена на выпускаемую продукцию, y^t объём произведённой продукции в период времени t.

Пусть $q(p) = \left(p_1^{-\rho} + \dots + p_2^{-\rho} \right)^{-\frac{1}{\rho}}, \text{где } \rho \geq -1.$

Постановка задачи: найти значения ρ при которых существует неотрицательная мера $\mu(dx)$, удовлетворяющая

(7) $$\int_{R_+^n} \theta\left(p_0^t - \left(\left(p_1^t x_1 \right)^{-\rho} + \dots + \left(p_n^t x_n \right)^{-\rho} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \right) \mu(dx) = y^t, \ \left(t = 1,\dots,T \right).$$

Исследование проблемы моментов (7)

Гиперповерхности $\left(\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho}+\ldots+\left(p_n^t x_n\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}=p_0^t,\ t=0,\ldots,T$ разбивают множество R_+^n на области Λ. Сопоставим каждой области V булевский вектор (спектр области) $b(V)=\left(b_1(V),\ldots,b_T(V)\right),$ где

$$b_t(V)=\begin{cases}1, \text{если } p_0^t>\left(\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho}+\ldots+\left(p_n^t x_n\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} \text{ при } x\in \operatorname{int} V, \\ \Lambda \\ 0, \text{если } p_0^t<\left(\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho}+\ldots+\left(p_n^t x_n\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} \text{ при } x\in \operatorname{int} V.\end{cases}$$

Обозначим через $B\left(\left(p^1,p_0^1\right),\ldots,\left(p^T,p_0^T\right)\right)$ спектр разбиения, т.е. множество векторов $b(V),$ построенных по всевозможным областям разбиения R_+^n гиперповерхностями $p_0^t=\left(\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho}+\ldots+\left(p_1^t x_1\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}, t=1,\ldots,T.$

Предложение 1. Проблема моментов (7) разрешима тогда и только тогда, когда вектор $\left(y^1,\ldots,y^T\right)$ принадлежит выпуклой конической оболочке спектра $B\left(\left(p^1,p_0^1\right),\ldots,\left(p^T,p_0^T\right)\right).$

Необходимое условие разрешимости проблемы моментов

Определим для каждого $t \in \{0,...,T\}$ вектор $w(t) = \left(w_V(t) \middle| V \in \Lambda\right)$, компоненты которого соответствуют областям Λ и вычисляются по следующему правилу

$$w_V(t) = \begin{cases} 1, \text{если}\, b_t(V) = 1, \\ 0, \text{если}\, b_t(V) = 0. \end{cases}$$

Необходимое условие разрешимости проблемы моментов

Пусть Ω_1 и Ω_2 произвольные подмножества множества $\{0,...,T\}$

Если $\sum_{t \in \Omega_1} w(t) \geq \sum_{t \in \Omega_2} w(t)$, то $\sum_{t \in \Omega_1} y(t) \geq \sum_{t \in \Omega_2} y(t)$.

Дискретная выпуклость

Предложение 2. Необходимое условие оказывается и достаточным условием разрешимости проблемы моментов (7) тогда и только тогда, когда конус $\Gamma = con\,B\left(\left(p^1, p_0^1\right),...,\left(p^T, p_0^T\right)\right)$ является дискретно выпуклым, т.е. все вершины полиэдров

$$\Gamma \cap \left\{ y = \left(y_0,...,y_T\right) \middle| -1 \le y_j \le 1,\ j = 0,...,T \right\}$$ и

$$\Gamma^* \cap \left\{ y = \left(y_0,...,y_T\right) \middle| -1 \le y_j \le 1,\ j = 0,...,T \right\}$$

имеют координаты, принимающие лишь одно из трёх значений $\{-1, 0, 1\}$.

Плактический моноид

Луч $\{z_2 = z_1 \tan\alpha \mid \alpha \in (0; \pi/2), z_1 > 0\}$

$\pi(\alpha) = \left(\pi_0(\alpha), \ldots, \pi_T(\alpha)\right) \in S_{T+1}$ порядок пересечения с лучем

σ_t элементарная транспозиция $\pi_t(\alpha)$ и $\pi_{t+1}(\alpha)$

в текущем порядке

Соотношения Мура-Кокстера

1. $\sigma_t^2 = 1$
2. $\sigma_{t_1}\sigma_{t_2} = \sigma_{t_2}\sigma_{t_1}$, если $|t_1 - t_2| \geq 2$
3. $\sigma_t\sigma_{t+1}\sigma_t = \sigma_{t+1}\sigma_t\sigma_{t+1}$

Ромбические тайлинги

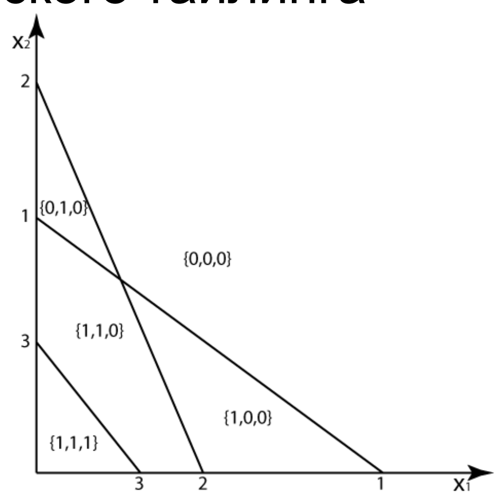
Рассмотрим случай, когда $n = 2$. Обозначим $e_t = \left(1; t - \left[\frac{T+1}{2}\right]\right), t = 0, ..., T$.

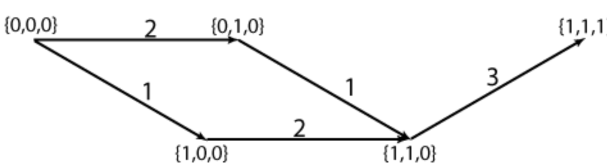
Области *V* поставим в соответствие точку $\xi(V) = \sum_{t=1}^{T} b_t(V) e_t$.

Точки, соответствующие соседним областям, соединим отрезками.

Полученная фигура будет являться ромбическим тайлингом, соответствующим разбиению.

Точкам пересечения кривых разбиения соответствуют ромбы ромбического тайлинга





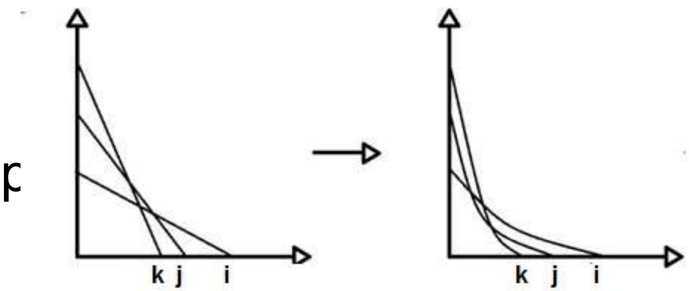
Условия разрешимости проблемы моментов

Предложение 3. Пусть порядок $\lambda = \left(\lambda(0),...,\lambda(T)\right) \in S_T$ такой, что $y\left(\lambda(j)\right) > y\left(\lambda(j+1)\right),\ j = 1,...,T-1$. Если змейка, соответствующая порядку $\lambda,$ содержится в ромбическом тайлинге, построенном по разбиению Λ, то проблема моментов (7) разрешима.

Если змейка, соответствующая порядку $\lambda,$ выходит за пределы ромбического тайлинга, то построенного по разбиению Λ, то проблема моментов (7) не разрешима.

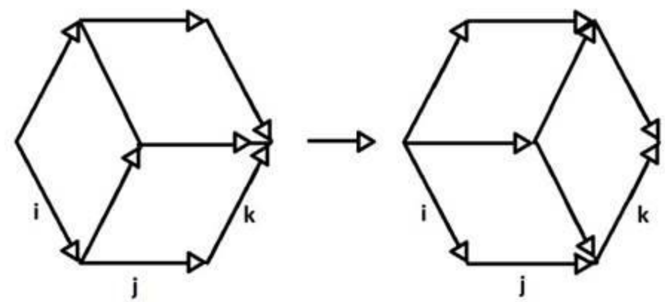
Деформации разбиений и флипы ромбических тайлингов

При изменении $\rho \in [-1; 0) \cup (0; +\infty)$ любые три кривые пересекаются в одной точке не более одного раза; при этом спектр разбиения изменяется в результате операции флипа.



Теорема (Леклерк Б., Зелевинский А.В.)

Любые два полных ромбических тайлинга можно перевести друг в друга путем последовательного применения конечного числа операций флипа.



Дополнение (Е.Г. Молчанов)

Теорема верна для ромбических тайлингов с одинаковыми верхней и нижней границей.

Литература

1. *Afriat S.N.* The construction of utility functions from expenditure data // International economic review, 1967, № 7, p. 67-77.
2. *Varian H.* Non-parametric tests of consumer behavior // The review of economic studies, 1983, v.L(1), № 160 (1), p.99-100.
3. *Шананин А.А.* Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса. // Мат. моделирование, № 9, 1993, с.3-16.
4. *Houtman M.* Nonparametric consumer and producer analysis // Dissertation № 95-32, 1995, University of Limburg, Maastricht, the Netherlands.
5. *Levin V.L.* Reduced cost function and their applications // J. of Math. Econ., 1997, v.28.
6. *Петров А.А., Шананин А.А.* Об условиях существования агрегированных функций спроса. М.:Докл. АН, 1997, Т. 356, \No2, с.170-172
7. *Поспелова Л.Я., Шананин А.А.* Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод // Мат. моделирование, № 4, 1998, с.105-116.

Литература

8. *Шананин А.А.* Агрегирование конечных продуктов и проблема интегрируемости функций спроса.// М.: ВЦ АН СССР, 1986, 66 с.
9. *Петров А.А., Шананин А.А.* Условия интегрируемости, распределение доходов и социальная структура общества. // Математическое моделирование, 1994, т.6, №8, с. 105-125.
10. *Шананин А.А.* Об агрегации функций спроса. // Экономика и математические методы, 1986, т. 25, №6, с.1095-1105.
11. *Тарасов С.П., Шананин А.А.* О гладкости функции полезности в теореме Африата - Вериана. // Докл. АН, 2003, т. 388, №1, с.19-22.
12. *Вратенков С.Д., Шананин А.А.* Анализ структуры потребительского спроса с помощью экономических индексов. // М.: ВЦ АН СССР, 1991, 62 с.
13. *Шананин А.А.* Проблема интегрируемости и обобщенный непараметрический метод анализа потребительского спроса. // Труды МФТИ, 2009, т.1, №4, с.84-98.

Литература

14. *Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Усанов Д.А., Шананин А.А.* Технологии анализа рынков на основе обобщенного непараметрического метода. // М.: ВЦ РАН, 2010, 67 с.
15. *Кондраков И.А. Шананин А.А.* Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах и их приложения к анализу экономической информации // Журнал вычислительной математики и математической физики 2011, том 51, № 2, с. 188–205.
16. *Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А.* Обобщенный непараметрический метод. Применение к анализу товарных рынков. // Труды МФТИ, 2010, т.2, №3, с.32-45.
17. *Кондраков И.А.* Программный комплекс анализа торговой статистики на основе обобщенного непараметрического метода "Индекс" // Системы управления и информационные технологии, 1.1(43), 2011, с. 198-203.
18. *Кондраков И.А. Поспелова Л.Я. Шананин А.А.* Программа исследования и сегментации потребительских рынков. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008615547. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 19 ноября 2008 г. Москва, реестр программ для ЭВМ, 2008, 50 с.

Литература

19. *Houthakker H.S.* The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis. // Rev. Econ. Studies, 1955-56, v. 23 (1), №60, p.27-31.

20. *Johansen L.* Production functions. Amsterdam-London: North Holland Co., 1972.

21*. Cornwall R.* A note on using profit functions. – Internat. Econ. Rev., 1973, v.14, №2, p.211-214.

22. *Hildenbrand W.* Short-run production functions based on micro-data. //Econometrica, 1981, v.49, №5, p.1095-1125.

23. *Шананин А.А.* Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем. // ЖВМ и МФ, 1984, т.24, №12, с.1799-1811.

Литература

24. *Шананин А.А*. Исследование одного класса функций прибыли, возникающих при макроописании экономических систем. // ЖВМ и МФ, 1985, т.25, №1, с.53-65.

25*. Henkin G.M., Shananin A.A.* Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions. // Translation of mathematical monographs, 1990, v.81, p.189-223.

26. *Henkin G.M., Shananin A.A.* C^n – capacity and multidimensional moment problem. // Proceedings Symposium on Value Theory in Several Complex Variables, ed. by W.Stoll, Notre Dame Mathematical Lectures, 1990, №12, p.69-85.

27. *Henkin G.M., Shananin A.A.* The Bernstein theorems for Fantappie indcatrix and their applications to mathematical economics. // Lecture notes in pure and applied mathematics, 1991, v. 132, p.221-227.

Литература

28. *Шананин А.А.* Обобщённая модель чистой отрасли производства. // Математическое моделирование, 1997, т.9, №9, с. 117-127.

29. *Шананин А.А.* Исследование обобщённой модели чистой отрасли производства.//Математическое моделирование,1997,т.9,№10, с.73-82.

30. *Шананин А.А.* Непараметрический метод анализа технологической структуры производства. // Математическое моделирование, 1999, т.11, №9, с.116-122.

31. *Карзанов А.В., Шананин А.А.* О стабильных соответствиях конечных множеств евклидова пространства и их приложениях. // Экономика и математические методы, 2005, т.41, №2, с.111-112.

32. *Молчанов Е.Г.* О модификациях ромбических тайлингов, возникающих в обратной задаче распределения ресурсов. // Труды МФТИ, 2913, т.5, №3, с.67-74.

Литература

33. *Молчанов Е.Г.* О комбинаторных свойствах класса многогранных конусов, возникающих в обратной задаче о распределении ресурсов // Труды МФТИ, 2013, т.5, №3, с.67-74.

34. *Агальцов А.Д.* Теоремы характеризации для обобщённого преобразования Радона // Функциональный анализ и его приложения, 2015, т. 49, №3, с.57-60.

35. Agaltsov A.D., Molchanov E.G., Shananin A.A. Inverse Problems in Models of Resource Distribution // Journal of Geometric Analysis, 2017, DOI: 10.1007/s12220-017-9840-1

Спасибо за внимание!