

# ФИЗИКА И СОЦИОФИЗИКА<sup>1</sup>

## Ч. 2. Сети социальных взаимодействий.

### Эконофизика

Ю.Л. СЛОВОХОТОВ

Рассмотрены зарубежные и российские работы, относящиеся к социофизике (новому разделу физики, изучающему процессы в обществе) и к смежным областям численного и имитационного моделирования разнообразных социальных явлений. В первой части были кратко рассмотрены влияние климата и солнечной активности на исторические процессы и динамика систем «живых» частиц, включая автомобильное и пешеходное движение. В настоящей части обсуждаются сети социальных взаимодействий (структурная основа всех общественных систем), а также физические подходы к описанию процессов в экономике: эконофизика. В третьей, заключительной части обзора, будут представлены некоторые формальные модели социологии, политологии, лингвистики и математической истории.

**Ключевые слова:** междисциплинарные физические исследования, моделирование социальных систем, социофизика.

#### ВВЕДЕНИЕ

Общей тенденцией развития наук в XX в., перешедшей и в новое столетие, является постепенное проникновение идей и методов физики как в естественные, так и в традиционно гуманитарные дисциплины. Начиная с 1970-х гг., методы математического, а затем и физического моделирования все шире используются в таких науках как демография, социология, лингвистика, а экономика начала пользоваться математическим аппаратом значительно раньше. Помимо академических задач, эти же методы активно применяются в прикладных областях планирования и управления. В последние десятилетия физические и квазифизические аргументы проникают в историю и политологию. Во всех перечисленных дисциплинах усиливается стремление к объективному и, желательно, количественному описанию разнообразных социальных и экономических явлений.

С середины 1990-х гг. работы физиков, вначале посвященные анализу динамики биржи, а затем и более широкому кругу явлений в экономике, объединяются под общим названием *эконофизика*. Разработка количественных моделей в социологии, политологии, теории транспортных потоков и других направлениях исследования человеческого общества также постепенно перемещает соответствующие задачи из гуманитарных и инженерных наук в междисциплинарные приложения математики и физики. В литературе последних лет за всеми такими направлениями закрепляется термин *социофизика*, или «физика общества». Главная задача этой новой области естествознания заключается в поиске объективно измеряемых и формализуемых закономерностей, которыми определяются различные социальные процессы.

Настоящий обзор посвящен состоянию и перспективам физических исследований общества, представленных в текущей литературе. В его первой части [1] были кратко рассмотрены проявления общефизических принципов, порождающих «законы природы», в динамике социальных систем — прежде всего диссипативный и мультиагентный характер таких систем, позволяющий приме-

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00887-а).



нять к ним формализм статистической физики. Обсуждались такие направления исследований, как влияние солнечной активности на процессы в человеческом обществе, расчетное моделирование систем самодвижущихся «живых частиц» (автомобильное и пешеходное движение, стаи птиц и рыб, группы мобильных аппаратов) и некоторые прикладные аспекты «управления толпой». В настоящей части обзора рассматриваются работы по сетевым структурам социальных систем и процессам в таких сетях, а также по физической интерпретации процессов в экономике. Агентные модели социологии и политологии (в том числе заимствованные из физики) будут представлены в последней, третьей части. Там же будут кратко перечислены некоторые результаты, полученные в других сильно формализованных «общественных» дисциплинах: математической и компьютерной лингвистике, демографии, математических моделях истории.

Во всех частях обзора используется единая сквозная нумерация разделов (поэтому 2-я часть начинается с § 3). Однако список литературы, формулы и рисунки в каждой части пронумерованы отдельно: в них непосредственно включены «перекрестные» ссылки на работы, уже процитированные в ранее вышедших частях.

*Социальной системой* будем называть совокупность большого числа ( $N \gg 1$ ) взаимодействующих агентов, подверженных также воздействиям некоторой внешней среды. Разным типам взаимодействия «живых частиц» с внешней средой и друг с другом отвечают различные типы социальных систем: экономических, политических, транспортных и др. Подобно многим общественным дисциплинам, социальная физика анализирует измеряемые параметры социальных систем, но применяет для этого методы, перенесенные из статистической физики и физики стохастических процессов в сложных «неживых» системах. Однако социальные системы, строго говоря, не относятся к тем *макроскопическим* совокупностям термодинамически большого числа частиц ( $N \sim 10^{20} - 10^{25}$ ), которые составляют главную область приложений статистической физики в неживой природе. Их аналогами скорее являются *мезоскопические* ( $N \sim 10^4 - 10^{10}$ ) и даже *микроскопические* системы (от десятков и сотен до 1—2 тыс. частиц), имеющие целый ряд качественных отличий [2]. Применимость к подобным системам таких «предельных» ( $N \rightarrow \infty$ ) физических понятий, как фазовые состояния и фазовые переходы, энтропия, температура и т. д., не всегда очевидна, но в литературе по «физике общества» используется именно эта терминология. Несколько более подробно данный вопрос был за-

тронут в первой части обзора, где, с приведенными оговорками, обсуждались «фазовые состояния» транспортного потока или совокупности участников массовых мероприятий с верхней оценкой численности  $N \sim 10^4$ . В социофизической литературе среднюю интенсивность стохастических возмущений часто называют *температурой*, аналитическую форму для стратегий агентов выражают энергоподобным *потенциалом взаимодействия*, а медленные изменения внешних условий, сопровождаемые более быстрой релаксацией социальной системы, относят к *адиабатическим процессам* [1].

### 3. ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ СОЦИОФИЗИКИ (продолжение)

#### 3.2. Сети социальных взаимодействий<sup>2</sup>

Микроструктуру социальных систем отражают *сети*: конечные и бесконечные графы, вершины которых соответствуют агентам, а ребра — взаимодействиям между агентами. Далее мы будем называть такую конструкцию *сетью социальных взаимодействий* (ССВ). В большинстве социальных систем взаимодействия положительны, т. е. выгодны связанным агентам, и могут условно рассматриваться как аналоги химических связей с определенными величинами «энергии диссоциации» (проигрыша агентов или всей системы от разрыва взаимодействия). Примерами конечных фрагментов сети («социальных молекул») служат группы в толпе пешеходов [3], а также «графы коммуникаций» в стаях и формированиях движущихся аппаратов [4], упомянутые в предыдущей части обзора.

Сети социальных взаимодействий дают наиболее адекватную модель структуры человеческого общества. Исследованию сетей и процессов в них посвящена огромная литература в ряде научных и практических дисциплин, включая многочисленные работы физиков (так, из 180 статей и кратких сообщений, опубликованных в разделе «Interdisciplinary physics» журнала «Physical Review E» за 2009 г., две трети посвящены данной тематике). Вопросы строения и динамики сетей в социальных системах рассмотрены в целом ряде книг [5—16] и обзоров [17—21]. Строение таких сетей будет кратко охарактеризовано в п. 3.2.1. Далее мы перечислим некоторые работы в одном из наиболее актуальных направлений современной «сетевой» физики: исследования процессов на сетях фиксированной структуры, а также условий существования и перестройки ССВ.

<sup>2</sup> Пункт 3.1 см. в первой части обзора [1].

### 3.2.1. Принципы строения сетей

Сети, возникающие в результате человеческой деятельности, имеют сложную структуру (complex networks). Их фрагментами могут быть регулярные графы-решетки (рис. 1, а — например, система шоссе дорог в США), полные графы (рис. 1, б) и случайные графы (рис. 1, в, г). Последний тип структур можно получить, удаляя случайным образом некоторые ребра в исходном регулярном графе (графы *Эрдеша—Реньи* либо перераспределяя ребра между его вершинами (rewiring; графы *Уоттса—Строгаца* [22]). В последнее десятилетие физиками-теоретиками активно исследуются «растущие» *безмасштабные сети* (scale-free networks), или сети *Барабаши — Альберт* (рис. 1, д). На каждом шаге их построения к уже имеющимся узлам графа присоединяются новые узлы с вероятностью  $p_i = k_i^\alpha / \sum k_j^\alpha$ , где  $k_i$  — порядок  $i$ -го узла (число сходящихся в нем ребер),  $\alpha$  — эмпирический параметр [17]. Порядки узлов в таких сетях распределены по степенному закону; к ним, как и к современным сетям телекоммуникаций, в ряде случаев применима статистика экстремальных событий (см. далее).

В простейших графах и сетях (например, отражающих знакомства людей) все связи между узлами равноценны и изотропны (направления ребер  $i \rightarrow j$  и  $j \rightarrow i$  не различаются). Структуру такого графа задает *матрица смежности*  $\|A_{ij}\|$  с элементами  $A_{ij} = 1$  для всех пар связанных и  $A_{ij} = 0$  для не

связанных друг с другом вершин. Графы с направленными ребрами («входящие» и «выходящие» вызовы для телефонных контактов, сети влияния [16], научного цитирования и др.) называются *ориентированными*; ребра таких графов также называются *дугами*. Если «силам» связей между узлами отвечают различные веса  $A_{ij} = w_{ij} \in [0, 1]$ , граф называется *взвешенным* (электрическая схема, сеть дорог разной пропускной способности и т. д.; для взвешенных ориентированных графов  $w_{ij} \in [-1, 1]$ ) [23]. Спектры собственных значений матриц  $\|A_{ij}\|$  и спектральные распределения  $P(\lambda) = (1/N) \sum \delta(\lambda - \lambda_j)$  для сетей (где  $\delta(\lambda - \lambda_j) = 1$  при  $\lambda = \lambda_j$  и 0 в противоположном случае) отражают их топологию и могут определять динамику протекающих в них процессов [17—19].

Особыми фрагментами сетевых структур являются *когнитивные карты*: взвешенные ориентированные графы, которыми задается образ некоторой сложной, обычно социальной, системы в сознании ее исследователей. Вершины такого графа соответствуют компонентам системы (или же факторам, оказывающим влияние на исследуемый процесс), а дуги — взаимной зависимости компонентов (факторов). Весовые множители  $\{w_{ij}\}$ , отражающие направления и «силы» зависимостей, обычно устанавливают по экспертным оценкам (рис. 2). Построение и верификация когнитивных карт с помощью специального программного обеспечения используются в анализе *слабо определенных*, или «нечетких» (fuzzy), систем и процессов, а также для управления такими процессами. Данная быстро растущая область математического моделирования выходит за рамки нашего обзора (для ознакомления с ней см. работы [24—27] и цитированную в них литературу).

Интегральными характеристиками графов и сетей служат функция распределения вершин по порядку  $P(k) = \langle N(k) \rangle / N$  (где  $\langle N(k) \rangle$  — среднее число вершин порядка  $k$ ,  $N$  — общее число вершин) и среднее кратчайшее расстояние  $\langle l \rangle$  между парой связанных вершин, т. е. длина пути, равная минимальному числу соединяющих их ребер. (Порядки  $k_i^{(+)}$  и  $k_i^{(-)}$   $i$ -й вершины ориентированного графа соответственно равны числам входящих и выходящих ребер — так, на рис. 2  $k_1^{(+)} = 3$ ,  $k_1^{(-)} = 2$ ). Важной структурной характеристикой сети служит степень кластеризации  $C = 3M_\Delta / M_3$ : доля треугольных циклов в общем числе связанных цепочек из трех вершин. В полном графе  $C = 1$ , в плотной гексагональной («треугольной») сетке  $C = 2/3$ , тогда как для линейной цепи, квадратной решетки и любых других структур без треугольных циклов  $C = 0$ . В некотором смысле «антиподами» полных графов

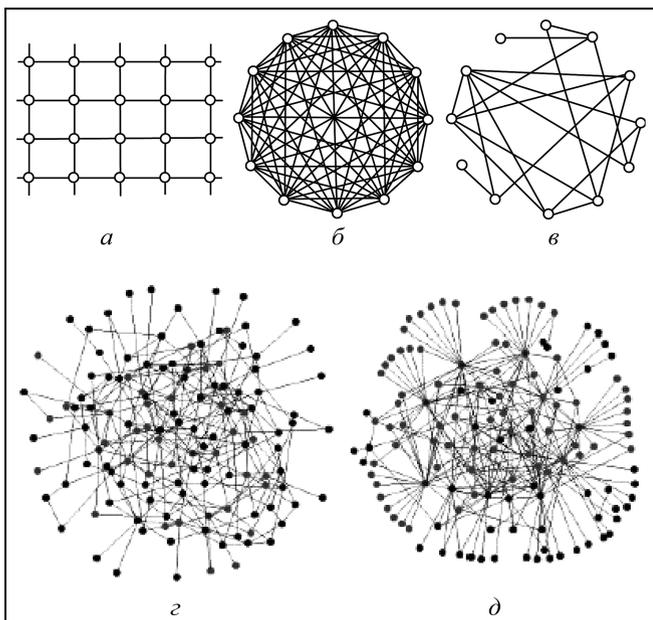
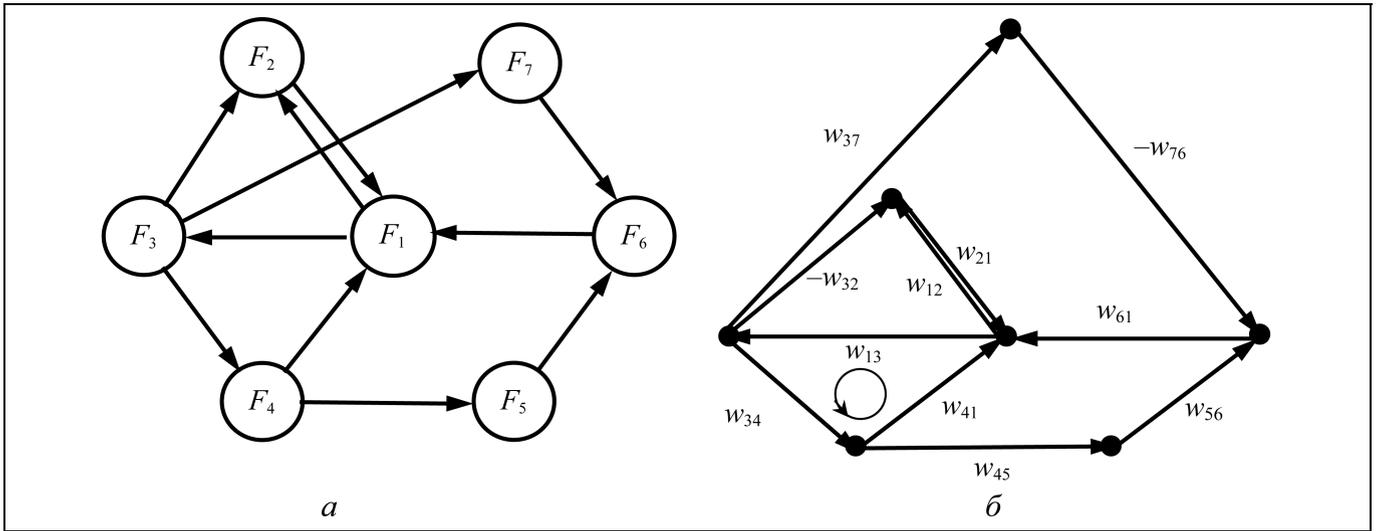


Рис. 1. Фрагменты сетей в социальных системах: а — регулярный граф; б — полный граф; в, г — реализации случайных графов; д — реализация безмасштабного графа [17]



**Рис. 2. Когнитивная карта (а) компонентов энергопотребления ([24], цит. по работе [27]):**  $F_1$  — потребление электроэнергии;  $F_2$  — стоимость электроэнергии;  $F_3$  — энергетические мощности;  $F_4$  — число предприятий;  $F_5$  — число рабочих мест;  $F_6$  — население;  $F_7$  — загрязнение окружающей среды выбросами электростанций. **Взвешенный ориентированный граф (б) данной карты, задающий линейные приращения компонентов:**  $\Delta F_1 = w_{21}F_2 + w_{41}F_4 + w_{61}F_6 - (w_{12} + w_{13})F_1$ ;  $\Delta F_2 = w_{12}F_1 + w_{32}F_3 - w_{21}F_2$ ;  $\Delta F_3 = w_{13}F_1 + w_{32}F_3 - (w_{34} + w_{37})F_3$ ;  $\Delta F_4 = w_{34}F_3 - (w_{41} + w_{45})F_4$ ;  $\Delta F_5 = w_{45}F_4 - w_{56}F_5$ ;  $\Delta F_6 = w_{56}F_5 - w_{76}F_7 - w_{61}F_6$ ;  $\Delta F_7 = w_{37}F_3 - w_{76}F_7$ . Показана петля положительной обратной связи  $F_1 \rightarrow F_3 \rightarrow F_4 (\rightarrow F_1)$

являются разреженные случайные сети с небольшим средним порядком вершин  $\langle k \rangle$ . При  $\langle k \rangle > 1$  и  $N \rightarrow \infty$  такие сети остаются в значительной степени связными: в них можно выделить *гигантский связный кластер*, объединяющий большинство узлов, и множество меньших связных фрагментов с экспоненциально убывающими размерами [18, 21].

В решетках и в полных графах все вершины имеют одинаковый порядок (в полном графе равный  $N - 1$ ); среднее расстояние  $\langle l \rangle$  в решетке с увеличением  $N$  возрастает как  $N^{1/d}$ , где  $d$  — размерность, а в полном графе  $\langle l \rangle = l = 1$ . Для случайных сетей Эрдеша—Реньи с большим  $N$

$$\langle l \rangle \sim \ln N, \quad C = \langle k \rangle / N,$$

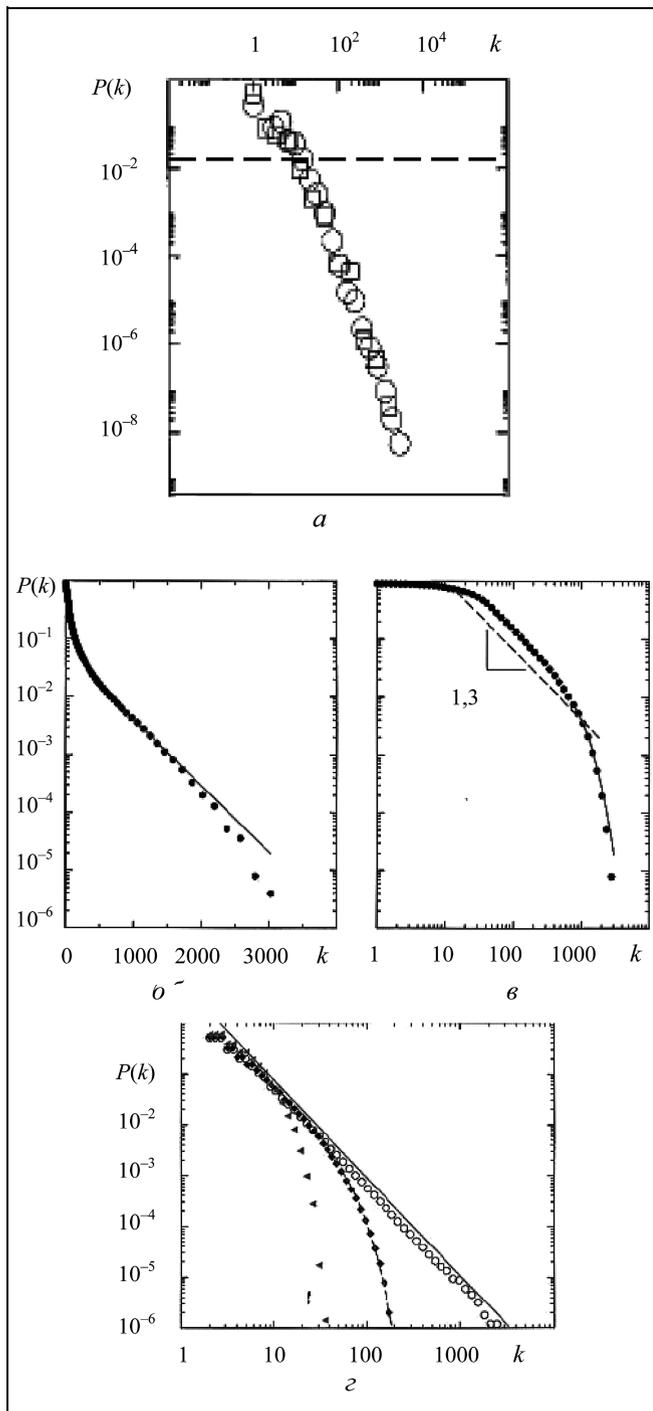
$$P(k) \sim (\langle k \rangle^k / k!) e^{-\langle k \rangle},$$

где  $\langle k \rangle$  — средний порядок вершины, зависящий от алгоритма построения сети. Распределение порядков узлов в таких графах асимптотически подчиняется закону Пуассона, т. е. доля узлов быстро падает с увеличением порядка. В то же время в сетях Барабаши—Альберт, по сравнению со случайной сетью, среднее расстояние между узлами меньше, и коэффициент кластеризации уменьшается с ростом  $N$  медленнее, а порядки узлов распределены в очень широком интервале по обратному степенному закону:

$$\langle l \rangle \sim \frac{\ln N}{\ln(\ln N)}, \quad C \sim N^{-\alpha} \quad (\alpha < 1), \quad P(k) \sim k^{-\gamma},$$

где показатель степени  $\gamma$  определяется алгоритмом роста сети  $p_i = k_i^\alpha / \sum k_j^\alpha$ ; при линейной ( $\alpha = 1$ ) зависимости вероятности присоединения нового ребра от порядка вершины  $\gamma = 3$  [17]. Таким образом, доля вершин порядка  $k$  в бесконечно растущей сети с возрастанием  $k$  убывает гораздо медленнее, чем у «классических» случайных сетей, и предпочтительного порядка вершин в них не существует, отчего такие сети и называют безмасштабными.

Каждый из идеализированных типов сетей лишь частично воспроизводит характеристики сложной структуры социальных взаимодействий. В ряде реальных сетей, включая Интернет и WWW, были обнаружены масштабно-инвариантные распределения по связности  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , однако им подчиняется лишь небольшая доля узлов-«концентраторов» (hubs) с высоким  $k$  (рис. 3, а). Для ряда структур, обсуждавшихся в работе [17] как примеры «безмасштабных» сетей, Эмерел и соавт. [28] обнаружили экспоненциальное падение частотности узлов с большими  $k$  (рис. 3, б). Авторы воспроизвели экспоненциальный «хвост» распределения в модели растущей сети с реалистическими допущениями конечности максимального порядка узлов и времени жизни связей, а также интерпретировали гиперболическую зависимость  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  при быстром росте как известную динамику критических показателей вблизи фазового перехода [29]. В ци-



**Рис. 3.** Кумулятивные распределения узлов по порядку  $k$ :  $a$  — WWW, двойной логарифмический масштаб; точки выше штриховой горизонтальной линии (более 95 % узлов) не соответствуют зависимости  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  [17];  $b$  — «сеть киноактеров» (ребро — совместное участие актеров в фильме) в полулогарифмическом и двойном логарифмическом масштабах ( $\theta$ ), сплошная линия — экспоненциальное падение;  $c$  — модель, двойной логарифмический масштаб: переход от (обратных) степенной к экспоненциальной зависимости при росте «затрат» на образования ребер; зависимость  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  при нулевых затратах [28]

тируемой статье 2000 г., которую физики явно недооценили, была предложена и общая классификация всех социальных структур, подразделяемых на масштабируемые (single-scale), безмасштабные (scale-free) и наиболее общие мультимасштабные (broad-scale) сети с распределением  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  в некотором интервале  $k$  [28]. Впоследствии сильную зависимость топологии растущих сетей от динамики «старения» связей анализировали Дороговцев и соавт. [30].

Во всех реальных ССВ числа вершин и ребер конечны (и обычно не очень велики), а распределение  $P(k)$  частотности узлов по связности дискретно, что затрудняет строгий выбор адекватной модели. Структура таких сетей неоднородна: в них могут существовать локальные кластеры узлов, близкие к полным графам — «клики» (cliques), выделенные подграфы-«сообщества» (communities), где внутренних связей существенно больше, чем внешних, разреженные фрагменты случайных графов, иерархические «деревья» и безмасштабные «ядра» с узлами-концентраторами высокой связности. Эмпирическое описание «сетей реального мира» (real-world networks) в литературе развивается параллельно с теоретико-графовым исследованием их характерных фрагментов.

Для биологических и антропогенных сетей в литературе распространен термин «сети тесного мира» (small-world networks) [22], подразумевающий, что произвольно выбранную пару вершин связывает кратчайший путь с малым числом ребер. Первые социологические эксперименты (или, скорее, рекламные акции; см. [18, 21]) по организации цепочек почтового и электронного сообщения с незнакомыми адресатами, породившие этот термин, могли отражать не столько реальную топологию коммуникационных сетей, сколько умение участников пользоваться адресной книгой или браузером. Более строго проведенные поиски путей с  $\langle l \rangle < \ln N$ , характерных для безмасштабных сетей, примерно в половине случаев дали скорее отрицательный результат  $\langle l \rangle \approx \ln N$  (см. табл. 1 и 2 в работе [17]). Учитывая относительно небольшое (до  $10^6$ – $10^7$ ) число узлов  $N$  в большинстве ССВ, вряд ли следует ожидать универсальной применимости для них асимптотических соотношений ( $N \rightarrow \infty$ ).

На практике сетями «тесного мира» обычно называют крупные неоднородные структуры с высокой (0,2–0,6) степенью кластеризации, где наряду с вершинами низкого порядка присутствуют узлы с большим и очень большим числом связей [21]. Этими свойствами обладает большинство сетей социальных взаимодействий (включая Интернет [13]), а также нейронные сети в живых организмах, сети транспорта (авиационное сообщение, газопроводы), энергопотребления и т. д. Поскольку су-



ществование всех таких конструкций невозможно без иерархически устроенного подмножества «управляющих» узлов, законность единого описания всей структуры (клиенты вместе с серверами) не вполне очевидна. Действительным объектом исследований сетей «реального мира» во многих случаях являются именно их управляющие структуры, в которые входит лишь небольшая часть всех вершин. Структуру произвольных ССВ удается воссоздать с заданной точностью на основе недавно предложенного обобщенного алгоритма роста, основанного на нелинейной зависимости вероятности присоединения ребер к вершинам:  $p_i = f(k_i)/\sum f(k_j)$  [31].

### 3.2.2. Процессы в сети социальных взаимодействий

Одним из наиболее исследованных процессов в сетях «реального мира» является распространение инфекций и компьютерных вирусов [18, 21, 32]. Математические модели эпидемиологии, подробно рассмотренные в обзоре [18], основаны на «протекании» (percolation) инфекции на заданном сетевом графе, в котором зараженный узел с некоторой постоянной вероятностью  $0 < \lambda < 1$  заражает один из связанных с ним узлов. Размеру эпидемии отвечает максимальный связный компонент на множестве инфицированных узлов, а меры борьбы (вакцинация) сводятся к удалению узлов из этого множества. Критический порог эпидемии  $\lambda_c$  (выше которого доля зараженных узлов  $N_{\text{инф}}/N$  не стремится к нулю («отделена от нуля»), а ниже ( $\lambda < \lambda_c$ ) экспоненциально убывает на каждом следующем шаге распространения инфекции) для однородных случайных сетей определяется средним порядком вершины:

$$\lambda_c^{SIR} = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}, \quad (1a)$$

$$\lambda_c^{SIS} = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}, \quad (16)$$

где символом  $\langle \cdot \rangle$  обозначено усреднение по сети [32]. В модели SIR (suspected — infected — recovered (removed), формула (1a)) инфицированный узел «умирает» или «выздоровливает», приобретая длительный иммунитет, т. е. в обоих случаях удаляется из множества потенциальных распространителей. В модели SIS (suspected — infected — suspected, формула (16)) «выздоровевший» узел не приобретает иммунитета и может быть заново инфицирован. Первая модель описывает распространение инфекционных заболеваний в сети человеческих контактов, вторая лучше соответствует эндемическим заболеваниям и компьютерным

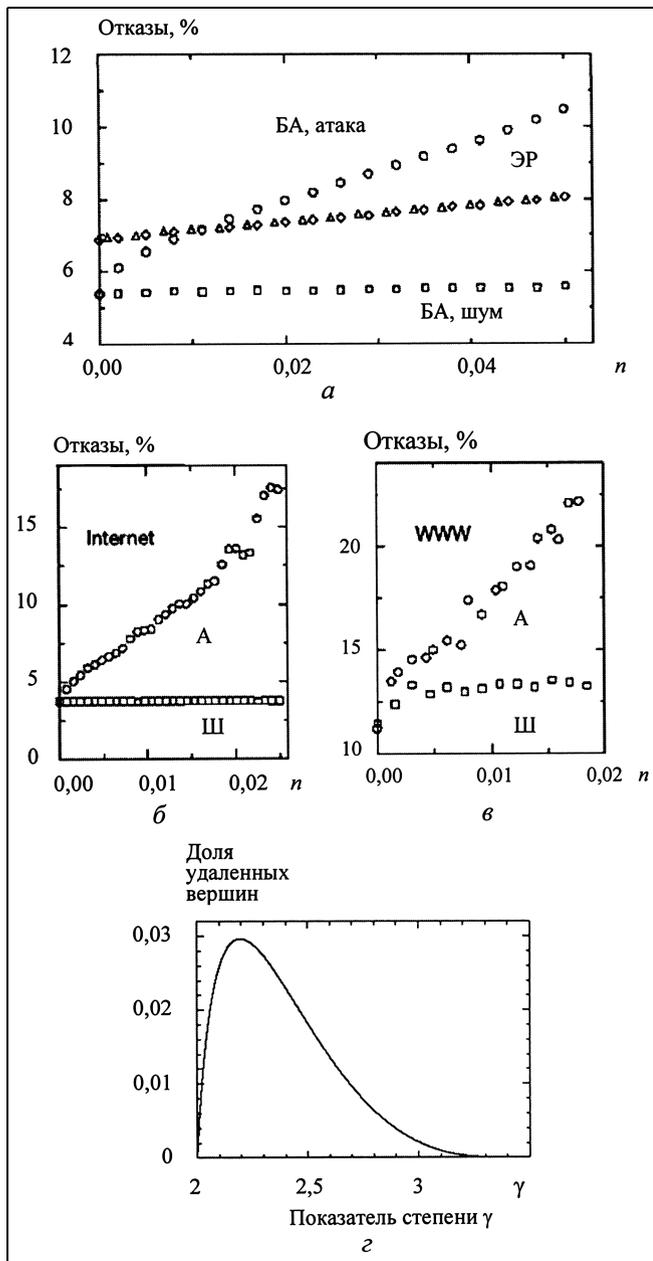
вирусам. Сходным образом моделируют квази-инфекционные процессы — такие как распространение слухов или коррупции в человеческом обществе (см. один из первых общих обзоров литературы по социофизике [33] и цитированные в нем работы).

Для бесконечных безмасштабных сетей с  $\langle k \rangle \rightarrow \infty$  (что достигается при показателе степени  $\gamma < 3$  в соотношениях  $P(k) \sim 1/k^\gamma$ ) формулы (1a) и (16) дают отсутствие порога распространения эпидемии [32]. В конечных сетях «тесного мира» эпидемический порог если и существует, то очень мал [21]. Таким образом, для ССВ, в согласии с эмпирическими данными, почти при любой вероятности  $\lambda$  рано или поздно возникает гигантский связный кластер инфицированных узлов, т. е. заражение становится «хроническим». Стратегия борьбы с эпидемией в таких сетях сводится к контролю над узлами наибольшей связности (постоянному обновлению антивирусных программ на серверах или, например, выявлению и лечению активных распространителей ВИЧ-инфекции) и профилактической вакцинации наиболее уязвимых индивидуумов, снижающей общий уровень заболеваемости [18, 32].

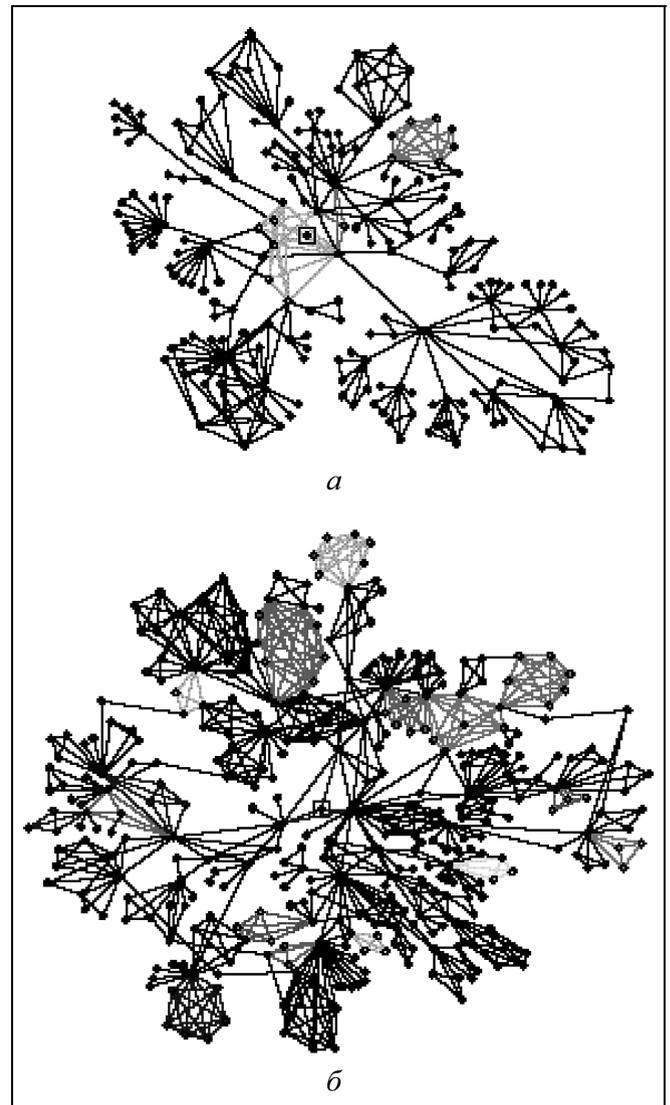
Большую практическую важность также имеют исследования устойчивости сетей к случайным отказам узлов и к целенаправленным атакам. Мерой устойчивости (resilience) служит зависимость размера максимального связного компонента от доли отказавших узлов, а сам процесс распространения случайных отказов сводится к физической задаче о перколяции узлов в сети [18]. Компьютерное моделирование [17—21, 34] показало очень высокую устойчивость безмасштабных сетей к случайному удалению узлов: гигантский связный кластер в них сохраняется вплоть до 70—80 % поврежденных. (Видимо, этим обстоятельством, закрепленным эволюцией, и объясняется «безмасштабный» вид управляющего ядра в биологических и социальных сетевых структурах). Однако такие сети уязвимы к атакам по узлам-концентраторам: для распада единой структуры достаточно убрать 1—3 % ее вершин наивысшего порядка (рис. 4). Различные аспекты этой эмпирически очевидной закономерности продолжают активно обсуждаться в литературе [21, 35—37].

Прикладные исследования сетей «реального мира», подобно исследованиям поведения толпы людей, нередко проводятся на эмпирическом уровне. Это направление представлено большим числом разработок эффективных алгоритмов поиска в Интернет и WWW [18] и быстрой «навигации» в произвольных сетях социальных взаимодействий (локализация клик, сообществ и концентраторов, определение интегральных параметров [38—41]), а также моделированием изменения сетевой структуры под действием внешних факторов (см. далее).

Тестовыми объектами в «навигационных» исследованиях обычно служат сети, для которых имеется доступная открытая информация (научные контакты, взаимное цитирование, клубы по интересам, телефонные звонки и др.; рис. 5), однако спектр их возможных приложений весьма широк. В последние годы большое внимание привлекает



**Рис. 4.** Устойчивость (а) безмасштабных (Барабаша—Альберт) и случайных сетей (Эрдеша—Реньи) к стохастическому удалению вершин («шум») и к удалению вершин максимального порядка («атака»):  $n$  — доля удаленных вершин;  $\bar{b}$ ,  $\bar{v}$  — то же для Интернета и WWW (А — атака, Ш — шум) [34];  $\bar{z}$  — зависимость доли удаленных вершин максимального порядка, приводящей к распаду безмасштабной сети ( $P(k) \sim k^{-\gamma}$ ), от показателя степени  $\gamma$  [18]



**Рис. 5.** Структура фрагментов ССВ: а — общение в сети мобильных телефонов; б — научное соавторство по библиотеке ArXiv электронных публикаций Корнельского университета (США) в социофизическом разделе [39]. Оттенками серого (в оригинале цветом) выделены подграфы-сообщества

взаимосвязь сетевых структур с несущим их «географическим ландшафтом» [42, 43] и описание конкретных видов сетей (городские коммуникации [44], мобильные телефоны [45, 46], газопроводы [47], сети мировой торговли [48] и глобального корпоративного управления [49]). Для более детального описания связей («ассортативные» и «дисассортативные» сети [21], непрерывный параметр «силы» взаимодействия [46], «положительные» и «отрицательные» взаимодействия вершин [50]) используются ориентированные взвешенные графы — в том числе в задачах управления процессами в сетях (см. работы [16, 49] и цитированную в них литературу). Последнее направление пере-



плетается с моделированием мировой экономики (см. п. 3.3) и проблемами физической политологии, которые будут рассмотрены в третьей части обзора.

### 3.2.3. «Фазовые переходы» в сетях

Существенные изменения интегральных параметров сетевой структуры под воздействием внешних факторов в физической литературе обычно относят к *критическим явлениям* [19], часто называя их также «фазовыми переходами». Под этим термином объединяют самые разные процессы, включая рассмотренный выше рост модельных сетей [28] и «протекание» в них инфекции с образованием гигантского связного кластера зараженных узлов [32]. Среди подобных явлений большое внимание вызывает синхронизация динамики узлов в сети, для описания которой часто используют модель связанных стохастических *осцилляторов Курамото*:

$$d\theta_i/dt = -\omega_i + J \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2a)$$

где  $\theta_i$  — фаза  $i$ -го осциллятора,  $\omega_i$  — его частота, а  $J$  — сила связи (coupling) осцилляторов. «Бесструктурная» модель (2a) переносится на сеть введением в сумму множителей 0 или 1, равных элементам матрицы смежности  $\|A_{ij}\|$  сетевого графа [21]:

$$d\theta_i/dt = -\omega_i + J \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (2б)$$

Решениями системы уравнений (2б) задаются различные режимы синхронизации, которую отражает параметр порядка  $r = (1/N) \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \right|$  ( $r = 1$  для полной синхронизации и  $r = 0$  для случайного набора фаз), в зависимости от силы связи  $J$ , структуры сети и дисперсии распределения частот  $\omega_i$ : шумового аналога «температуры». Моделирование синхронизации узлов на случайных и безмасштабных графах [51–54] используется в изучении как динамики нейронных сетей мозга, так и кооперации агентов в социальных системах<sup>3</sup>.

Серия социофизических работ посвящена исследованию каскадных процессов в сетевых структурах — таких как лавинообразное распростране-

ние повреждений в техногенных сетях [18, 21]. Распределение числа сбоев энергоснабжения в США по числу обесточенных потребителей  $N$  имеет степенной «хвост»  $P(N) \sim N^{-\gamma}$ , вообще весьма характерный для статистики социальных процессов [56]. Моделирование отказов в сетях [57–61] основано на такой структурной характеристике, как «важность» [16], или «нагрузка» узла [21]. Этот параметр, в англоязычной литературе называемый *betweenness centrality* («сосредоточенность связывания»), равен доле кратчайших путей между всеми парами узлов сети, проходящих через данный узел [58, 59]:

$$B_m = \sum_{ij} n_{ij}(m)/n_{ij}, \quad 0 < B_m < 1,$$

где  $n_{ij}(m)$  — число кратчайших путей  $i - \dots - m - \dots - j$  через  $m$ -й узел, а  $n_{ij}$  — общее число кратчайших путей  $i - \dots - j$ . Превышение критической нагрузки  $m$ -го узла  $B_m^{(0)} = (1 + \alpha)B_m$  (где  $B_m$  — его нагрузка в неповрежденной сети,  $\alpha > 0$  — параметр устойчивости) ведет к отказу и перераспределению нагрузки между оставшимися узлами сети, что может вызывать каскад повреждений. Не реализуемые на практике случайные сети Эрдеша—Реньи (см. п. 3.2.1) с  $\alpha \neq 0$  при любых таких повреждениях остаются связными, а устойчивость безмасштабных сетей растет с уширением распределения порядков вершин (т. е. уменьшением показателя  $\gamma$  в обратном степенном распределении узлов по связности  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ ). В недавней работе [61] было показано, что для пары взаимосвязанных безмасштабных сетей проявляется обратная тенденция: их уязвимость к случайным отказам растет с уменьшением  $\gamma$ . Лавине отказов во взаимосвязанных сетях соответствуют, в частности, отключения электростанций, управляемых через Интернет [21, 61].

### 3.2.4. Условия распада сетей

В рассмотренных примерах «фазовых переходов» строение сети оставалось фиксированным, а изменениям микросостояний системы отвечали заражение или отказы узлов, происходившие в ней с некоторой наперед заданной вероятностью. В работе [62] авторы моделировали условия перестройки самой сетевой структуры методами статистической термодинамики. В рамках модели каждому ребру графа (либо его вершине порядка  $k$ ) приписывали определенную отрицательную (стабилизирующую) энергию, а внешнее шумовое воздействие могло приводить к «диссоциации», т. е. разрыву ребер. Для совокупности всех возможных структур («топологий») с  $N$  вершинами и  $M$  ребрами при заданном уровне шума («температуре»), в

<sup>3</sup> Модель (2a), (2б) не только дает более строгое и точное описание для рассмотренной в первой части [1] системы связанных осцилляторов, генерировавших ритмические аплодисменты [55], но и поясняет причину такого парадоксального поведения участников политических акций в последние годы, как синхронные прыжки на месте.

статистической термодинамике называемой *каноническим ансамблем*, находили сумму по состояниям

$$Z(T) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \exp(-E_{\alpha}/T) = \sum_{\alpha} \exp(-F_{\alpha}/T),$$

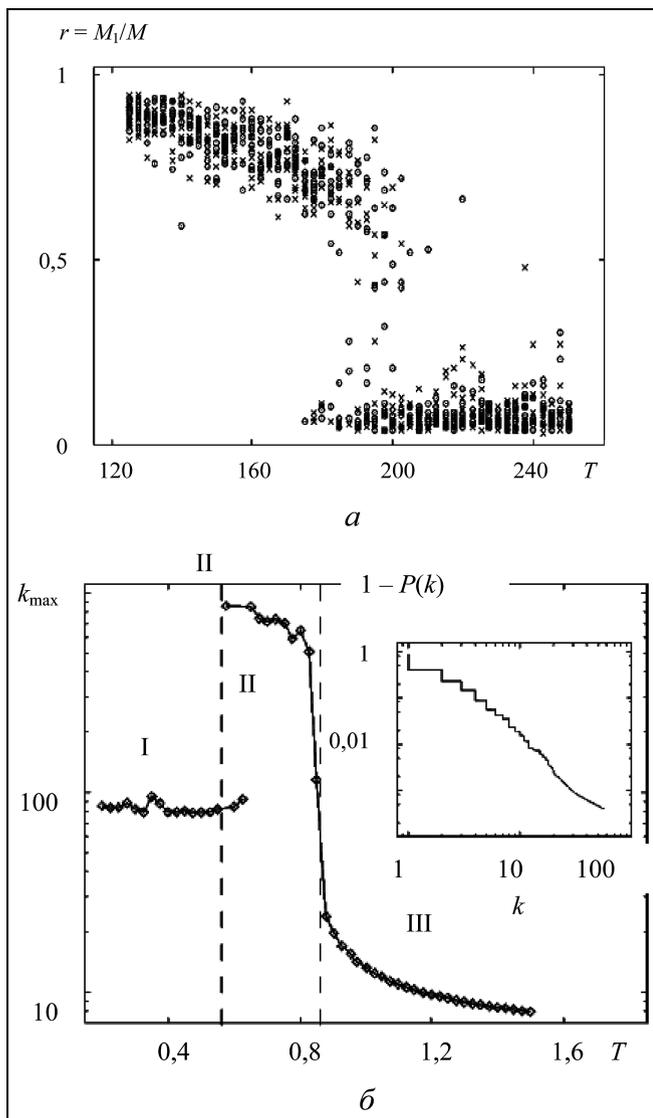
где  $n_{\alpha}$  — число топологически эквивалентных структур с энергией  $E_{\alpha}$ ,  $T$  — температура,  $S_{\alpha} = \ln n_{\alpha}$  (энтропия),  $F_{\alpha} = E_{\alpha} - TS_{\alpha}$  (потенциал Гельмгольца) и суммирование проводилось по всем топо-

логически различным реализациям графов в ансамбле. Вероятность реализации определенной топологии сети в этой упрощенной модели с единичной константой Больцмана была равна  $p_{\alpha} = Z^{-1} n_{\alpha} \exp(-E_{\alpha}/T)$ .

Авторы [62] выполнили расчетное моделирование перераспределения ребер в весьма разреженных случайных графах методом Монте-Карло при различной «температуре»  $T$ . Рассчитанные отношения  $r = M_1/M$  числа ребер получаемого гигантского связного кластера  $M_1$  к общему числу  $M$  ребер исходного графа, выбранные в качестве параметра порядка, показали «фазовый переход 1-го рода», т. е. разрушение модельной случайной сети при температуре выше критической (рис. 6). Поскольку отсутствие гигантского связного компонента в случайных графах со средним порядком вершин  $\langle k \rangle < 1$  было установлено Эрдешем и Реньи в конце 1950-х гг. [18, 62], этот результат прямо следовал из применения алгоритма Метрополиса, в рамках которого вероятность «энергетически невыгодного» уменьшения порядка вершины растет с увеличением  $T$  [63].

Несмотря на довольно тривиальный характер полученных «фазовых переходов» (аналоги которых многократно отмечались в расчетном моделировании «неживых» многочастичных систем [63]), исследование [62], как одно из первых приложений термодинамических моделей к сетям, породило большое число публикаций. В последующей работе [64] был предложен алгоритм определения общей структуры сетевого графа, рассматриваемого как набор перекрывающихся субъединиц-сообществ (в частности,  $k$ -вершинных клик), на основе фазового перехода «протекания» субъединиц в его подграфах. Ряд исследований этого направления посвящен устойчивости и разрушению сетевых структур при внешнем «шумовом» воздействии. Так, методом Монте-Карло было показано [65], что повышение «температуры» вызывает переход от сложной неоднородной к случайной сети с резким уменьшением коэффициента кластеризации. В отечественной литературе формализм теории информации и статистической физики также был использован для описания ССВ [16, 66].

В последние годы интерес исследователей вызывает совместное воздействие шума и структуры сетей на синхронизацию нелинейных стохастических осцилляторов [67], *стохастический резонанс* (возбуждение колебаний малой вынуждающей силой при определенном уровне шума) [50, 68] и иные динамические явления [69]. В частности, было показано, что в сетях неупорядоченной «аморфной» структуры динамические процессы замедляются, что приводит к образованию метастабильных



**Рис. 6.** Распад гигантского связного кластера (а) в графе Эрдеша—Реньи (см. текст) при повышении «температуры»  $T$ ; «фазовые переходы» при изменении  $T$  для совокупности кластеров с «энергией»  $E = \sum k_i \ln k_i$  ( $k_{\max}$  — максимальный порядок вершины в кластере) в полулогарифмическом масштабе (б): область I — полный граф, II — связанные «звезды», III — изолированные фрагменты; на врезке: распределение частотностей порядка вершин кластеров в двойном логарифмическом масштабе при  $T = 0,84$  [62]

упорядоченных фрагментов: аналогов кластерных магнитных фаз Гриффитса [69]. С другой стороны, при наличии случайно распределенных дестабилизирующих взаимодействий с положительной энергией (взаимного отталкивания узлов) в решеточной модели Изинга [50] или в бесструктурной совокупности взаимосвязанных нелинейных осцилляторов [68], в системе усиливается стохастический резонанс. Обнаруженный в работах [50, 68] оптимум усиления при определенной концентрации дестабилизирующих взаимодействий может использоваться как в обработке слабых сигналов, так и в управлении социальными системами (статья [50] озаглавлена «Разделяй и властвуй: ...»).

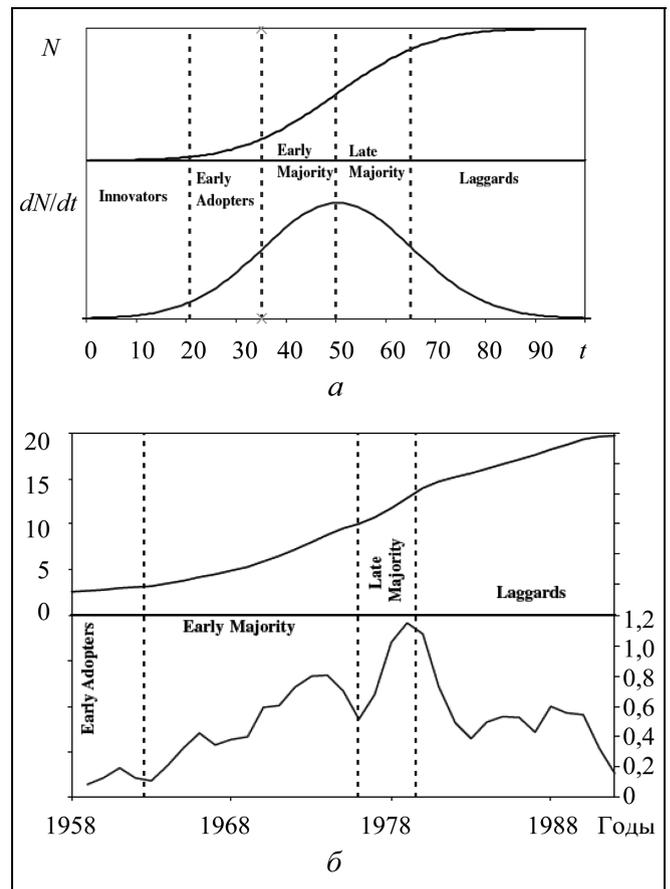
### 3.2.5. «Диффузия инноваций»

Этот весьма широкий термин восходит к названию книги Эверета Роджерса, вышедшей в 1962 г. и затем четырежды переизданной [70]. Во второй половине XX в. так назывались исследования в теоретической экономике и маркетинге по выведению новых товаров на рынок (см. обзор [71] и цитированную в нем литературу). В рамках имитационного моделирования кумулятивный рост спроса бесструктурной массы покупателей на новый продукт описывали S-образной кривой — в простейшем случае графиком логистической функции

$$N = \frac{a}{1 + c \exp(-bt)}, \quad (3)$$

где  $N(t)$  — доля (или число) покупателей нового товара,  $t$  — время,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — эмпирические параметры (рис. 7, а). На графике производной  $dN/dt$  в соответствии с результатами исследований потребительской психологии выделялись различные категории покупателей: «новаторы» (2–3 % от общего числа), «первые последователи» (early adopters, 13–14 %), «раннее большинство» (34 %), «позднее большинство» (34 %) и инертные консерваторы, или «ретрограды» (laggards, 16 %). Хотя кумулятивное S-образное распределение (3) качественно согласуется с большим эмпирическим материалом, реальная динамика внедрения товаров и услуг в рыночной экономике не вполне соответствует его плавной унимодальной производной (рис. 7, б). Нередко (особенно при наличии конкуренции) новшества не принимаются рынком и процесс их внедрения затухает на начальной стадии, но даже динамика успешных нововведений трудно поддается прогнозированию [71].

С середины 1990-х гг. внедрение инноваций моделируют процессом диффузии на сетях социальных взаимодействий, близким к математическим моделям эпидемиологии [32, 33]. В этом более реалистическом приближении порог перколяции



**Рис. 7. Динамика диффузии инноваций:** а — логистическая кривая и ее производная ( $N$  — доля воспринявших нововведение), б — динамика телефонизации Англии (вверху — общее число абонентов, млн.; внизу — число новых абонентов в год, млн.) [71]

различен для разных категорий покупателей (увеличиваясь от новаторов к консерваторам) и существенно зависит как от их восприятия конкретных нововведений, так и от «несущей» сетевой структуры. Рассмотренные выше неоднородность и анизотропия ССВ на качественном уровне позволяет объяснить отклонения эмпирической динамики «диффузии инноваций» от идеализированных распределений [72, 73], однако для ее количественного расчета необходимо детально знать структуру «потребительской сети» (на уровне расположения покупателей всех категорий в ее узлах) и вводить большое число эмпирических коэффициентов. С другой стороны, успехи в качественном моделировании динамики сетей в последнее десятилетие позволили рассматривать внедрение новых товаров на рынок как частный случай «диффузии информации», понимая (иногда не совсем обоснованно) под этим термином почти любые динамические процессы в сетях [16].

Современные работы в области «диффузии инноваций», подобно другим приложениям социофизики, фокусируются на определении структуры реальных сетей и инициировании в них самых разных динамических процессов (от рекламы товаров до навязывания населению страны определенной политической системы). Важным, хотя и не вполне определенным параметром в этой области служит *критическая масса* сторонников нововведений (на практике оцениваемая в 10–20 %), при достижении которой «диффузия» становится необратимой [74–76]. Для получения такого эффекта разработаны практические рекомендации — привлечение на сторону «инноваторов» популярных политиков и деятелей массовой культуры (т. е. заражение узлов высокой связности), образование множества новых связей (*rewiring*) благодаря пропаганде «инноваций» среди женщин, молодежи и этнических меньшинств [76], агитация в Интернет [77] и др. — явно рассчитанные на отсутствие эпидемического порога в безмасштабных сетях.

Объектами исследований распространения информации в последние годы становятся сети мобильных телефонных контактов и разрабатываемые в США «информационные сети» (Twitter, Facebook, YouTube), не имеющие надежных средств контроля в большинстве стран мира. Так, в работе [46] эпидемиологическими моделями описывали распространение информации во взвешенной сети мобильных телефонов с «силами» связей, пропорциональными суммарному времени контактов между каждой парой абонентов. Моделирование показало, что информация в такой сети распространяется медленнее, чем в сети той же структуры с единичными ребрами. Эмпирические данные по установке новых программ пользователями Facebook выявили порог распространения инноваций (аналог критической массы), выше которого возникает стимулирующее «социальное поле», поскольку новые программы становятся престижными [78].

В недавнем экспериментальном исследовании анализировались динамические результаты агитации (за здоровый образ жизни) в американских онлайн-сетях [79]. Еще одна характерная работа [80] посвящена «диффузии инноваций» с перераспределением связей, приводящем к распаду модельной сети. Хотя полученные результаты были изначально заложены авторами в модель («новаторы» предпочтительнее образовывали новые связи с «новаторами», чем с «консерваторами», и наоборот), сама постановка задачи представляется достаточно красноречивой. Родственные исследования в области политологии и политтехнологий будут обсуждаться в третьей части обзора.

### 3.3. ЭКОНОФИЗИКА

Математическое описание процессов в экономике складывалось во второй половине XIX в. параллельно с возникновением статистической физики. (Хрестоматийным примером может служить модель случайных блужданий, впервые предложенная Башелье в теории биржевых спекуляций [81] и лишь затем примененная к описанию броуновского движения [82]). «Классические» экономические теории XX в., нередко разработанные математиками и физиками, представили первую в истории естествознания систематическую формализацию общественных процессов, опирающихся на обмен. В ее основе лежала идея равновесия спроса и предложения, достижение которого при «идеальном», никем не регулируемом рынке с бесконечным числом конкурирующих агентов<sup>4</sup> приводит к максимуму *полезности* (*utility*)  $\sum u_i$  (ключевой, но слабо формализованной характеристики), просуммированной по всем участникам рынка, в *оптимуме Парето*, сдвиг из которого ухудшает положение хотя бы одного агента [83]. Многие особенности этих работ — стилизованный характер моделей, не допускающих прямой экспериментальной проверки, сведение сложных многопараметрических процессов к варьированию нескольких «агрегированных» переменных, использование предельных соотношений для явно немакроскопических систем и политическая ангажированность получаемых сугубо качественных теорий [84] — воспроизводились потом в теоретических конструкциях социологии, политологии, истории и других изначально гуманитарных наук (см. работы [85–87] и цитированную в них литературу).

Со второй половины XX в. в ряде разделов математической экономики все шире используется формализм, заимствованный из физики стохастических процессов [88–91]. Однако общие положения классической теории — такие как универсальный характер (статического) равновесия спроса и предложения или всюду выпуклая форма функции спроса — в современной неоклассической экономике принимаются как постулаты и не подлежат обсуждению. Этот явно политизированный консерватизм (открывающий дорогу для математического обоснования деструктивной «свободы рынка» во всем мире и единственности оптимума, найденного неоклассическими средствами) неод-

<sup>4</sup> Исторически первым модельным агентом в экономической теории, вероятно, был т. н. *homo economicus*: индивидум, стремящийся к максимуму собственной выгоды в каждом локальном акте социального процесса [83].



нократно критиковался в междисциплинарной литературе [84]. В конце XX в. для ряда процессов в экономике было предложено объективное и количественное, т. е. физическое описание, свободное от априорных ограничений.

Термин *эконофизика*, введенный в 1995 г. Юджином Стенли, вначале отвечал лишь применению стандартных физических методов обработки экспериментальных данных в количественном описании финансовых рынков [92, 93]. В настоящее время так называют раздел социофизики, посвященный анализу теоретических проблем экономики с помощью моделей и представлений, заимствованных из физики или восходящих к ней. Несмотря на критику эконофизики многими экономистами (в особенности представителями неоклассического «мейнстрима» [94]), к данному направлению приближаются такие собственно экономические дисциплины, как эконометрика [95], анализ состояния рынков [89], динамические [88] и теоретико-игровые [96] модели экономики, теория финансов и «финансовая инженерия» (см. далее). По эконофизике имеется большое число обзоров, учебников и монографий, включая публикации на русском языке [84, 97–104]. Работы последних лет рассмотрены в книгах [105, ч. I] и [106, 107]; см. также обзорные статьи [108–110].

### 3.3.1. Биржевая динамика

Первой областью систематического применения методов статистической физики к экономике стал количественный анализ динамики покупок и продаж на главных мировых биржах, а также динамики биржевых индексов (Dow Jones, S&P, DAX, Nikkei, PTC и др.), отражающей «усредненные» изменения стоимости акций ключевых фирм в различных странах. Его основу составили компьютеризация бирж (которая сделала доступными большие массивы численных данных, или *временные ряды*, трактуемые как результаты количественных измерений) и понятное желание физиков преуспеть в биржевой игре с помощью строгих научных методов. Хотя прикладной аспект первых эконофизических исследований в целом не был реализован (что неудивительно, учитывая двухвековую историю *технического анализа* биржевых данных, преследующего ту же цель [89]), работы Стенли и соавторов ввели динамику биржи в область физики стохастических процессов и инициировали новые подходы к ее описанию и моделированию [93, 97, 98].

Главная особенность биржевой динамики заключается в весьма нерегулярном характере изменения доходности ценных бумаг и товаров во временных рядах. Мерой доходности (return) в

данной области часто служит логарифм отношения цены  $S(t)$  некоторого товара либо акций некоторой фирмы в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$ , разделенные фиксированным интервалом времени:  $r(t, \Delta t) = \ln[S(t + \Delta t)] - \ln[S(t)]$ . Другими количественными характеристиками могут быть относительные изменения самой цены  $G(t)$  на промежутке времени  $\Delta t$  и ее дисперсия (*волатильность*  $v$ )

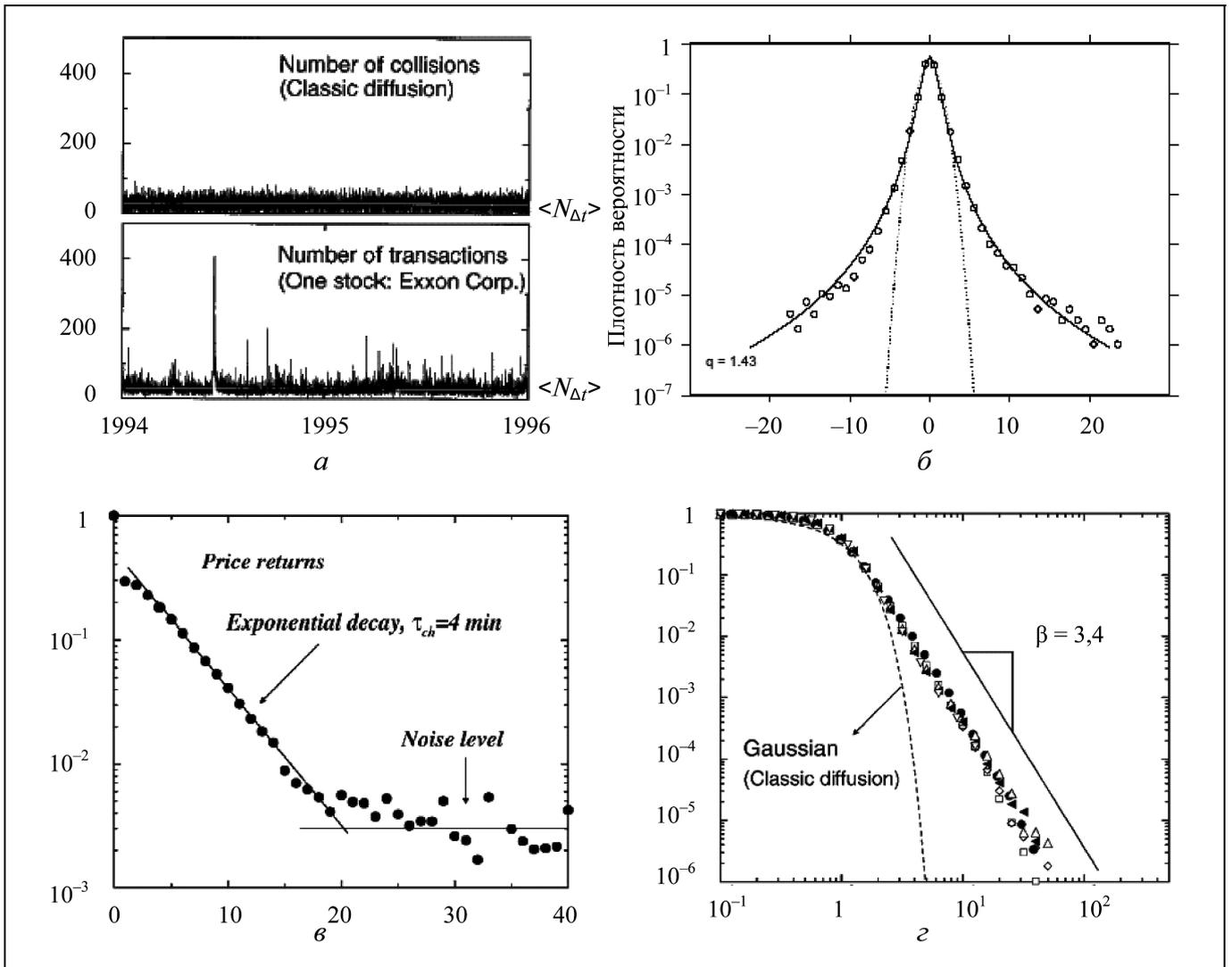
$$G(t, \Delta t) = \Delta S(t, \Delta t)/S(t) = [S(t + \Delta t) - S(t)]/S(t),$$

$$v = \sqrt{\langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle}$$

(где угловые скобки означают усреднение по времени), корреляции и автокорреляции этих величин, а также объемы продаж и количество сделок по данному виду товаров или акций. Все динамические параметры биржи сильно зависят от выбранного масштаба времени; стандартными являются их средние и предельные значения за рабочий день. Аналогичные характеристики рассчитываются для биржевых индексов (взвешенных сумм курсов акций по определенному списку компаний) и для обменных курсов валют [97, 98].

Анализ рядов биржевых данных с различным шагом  $\Delta t$  позволил установить ряд качественных особенностей их статистики, не зависящих или слабо зависящих от конкретного предмета купли-продажи: быстрое (в течение минут) затухание автокорреляций доходности («короткую память» биржи), большие флуктуации цен и объемов сделок, асимметрию стратегий агентов при покупках и продажах и взаимозависимость их поведения — в частности, «кластеризацию волатильности» [97, 111]. Вид распределений доходности акций во временных рядах при этом сильно зависит от длительности интервала  $\Delta t$  между «отсчетами»: для малых интервалов (минуты) они имеют негауссову «остроконечную» (leptocurtic) форму с обратными степенными «хвостами»  $G \sim 1/r^\gamma$ . Похожей асимптотикой  $P(|X| > x) \rightarrow x^{-\gamma}$  (где показатель степени часто, но не всегда лежит в интервале  $2 < \gamma < 3,5$ ) обладают кумулятивные распределения доходности акций и флуктуаций биржевых индексов, в области малых  $x$  хорошо аппроксимируемые гауссовой функцией (рис. 8). В позднейших исследованиях «тяжелые хвосты» (heavy tails)  $f(x) \rightarrow x^{-\gamma}$  с другими показателями степени были найдены для распределений объемов сделок, волатильности цен и стоимости крупнейших фирм-игроков [112–114].

Неклассические распределения «финансовых» переменных часто моделируют *распределением Леви*. Это распределение возникает в задаче о су-



**Рис. 8. Особенности статистики биржевых данных** [97, 98]: *a* — флуктуации гауссова процесса (вверху) и дневного количества продаж акций (внизу) при одинаковой дисперсии; *б* — типичный вид распределения логарифма доходности акций по единицам дисперсии (парабола — гауссово распределение); *в* — экспоненциальное падение доходности акций во времени в полулогарифмическом масштабе; *г* — кумулятивное распределение дневного числа транзакций (плотности продаж) для разных фирм в двойном логарифмическом масштабе, прямая линия — обратная степенная зависимость  $P(x > N) \sim N^{-\beta}$

*пердиффузии*, при которой коэффициент  $D$  в диффузионном уравнении

$$\partial p / \partial t = -v \partial p / \partial x + \partial^2 (Dp) / \partial x^2$$

сам является стохастической переменной, увеличиваясь для «быстрых» частиц [1, гл. 3.1.2]. В общем виде распределение Леви не имеет аналитической формы и выражается через фурье-образ плотности вероятности  $p(x)$ , или *характеристическую функцию*

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx} p(x) dx.$$

В простейшем одномерном случае распределение Леви, симметричное относительно начала координат, имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(qx) e^{-\kappa|q|^\alpha} dq \quad (4)$$

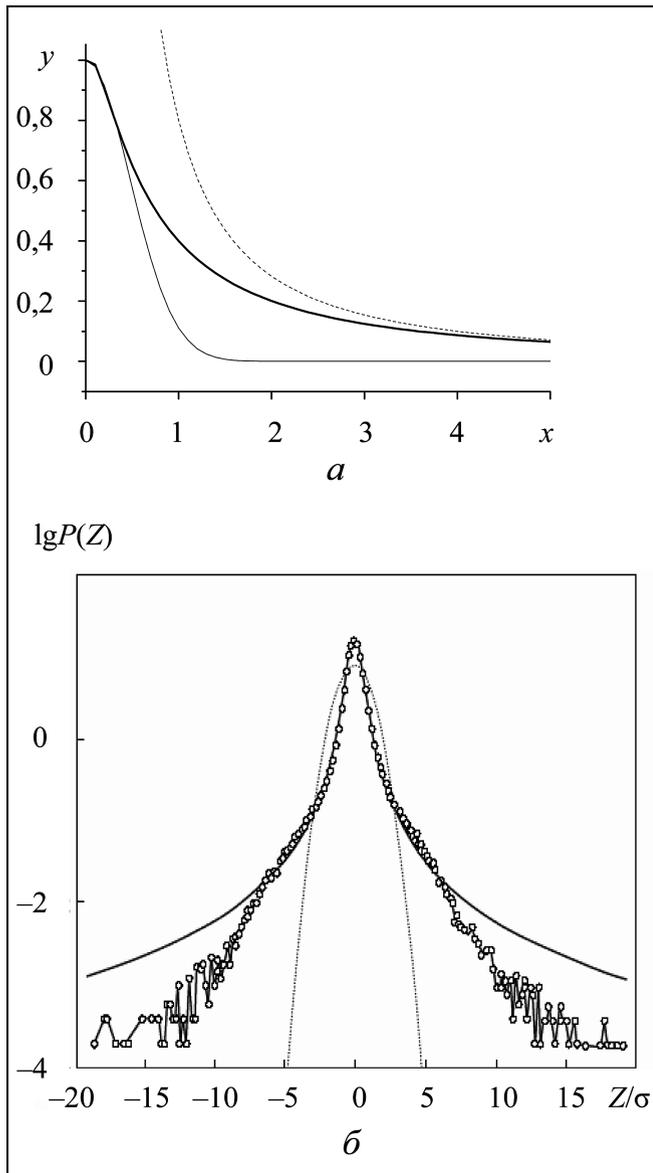
с характеристической функцией  $\varphi(q) = \exp(-\kappa|q|^\alpha)$ . Его частными случаями являются нормальное распределение Гаусса ( $\alpha = 2, \kappa = \sigma^2/2$ )

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

и функция Лоренца, или распределение Коши, справедливое для отношения  $\xi/\eta$  двух гауссовых случайных величин ( $\alpha = 1$ ):

$$p(x) = \frac{\pi/\kappa}{(\kappa^2 + x^2)}.$$

Подобно лоренцевой функции, распределение Леви допускает большие флуктуации и при  $x \rightarrow \infty$



**Рис. 9.** Распределение Леви (а) при  $\alpha = 1/2$  (жирная линия), асимптотически приближающие его гауссово распределение  $\exp(-ax^2)$  ( $x \rightarrow 0$ , тонкая линия) и обратная степенная зависимость  $bx^{-3/2}$  ( $x \rightarrow \infty$ , штриховая линия); **распределение значений индекса S&P в 1984—1989 гг.** с  $\Delta t = 1$  мин (точки) в полулогарифмических координатах (б): сравнение с гауссовой функцией (пунктир); сплошная линия — с распределением Леви при  $\alpha = 1,40$  [97]

асимптотически приближается к  $|x|^{-(\alpha + 1)}$ , т. е. имеет обратный степенной «хвост» (рис. 9, а); при  $\alpha < 2$  его дисперсия бесконечна. Как и все его частные формы, распределение Леви *устойчиво*: сумма случайных величин  $\sum \xi_i$ , распределенных по (4) с одинаковыми степенями  $\alpha$ , подчиняется аналогичному распределению (подробнее см. работы [97—100]). Однако для реальных распределений биржевых параметров «полет Леви» сильно (на 1—2 порядка) завышает вероятности больших флуктуаций (рис. 9, б). Эмпирические данные воспроизводят *усеченным распределением Леви*, непосредственно ограничивая «длину прыжка»  $x_i$  [97] либо представляя его случайными блужданиями, распределенными по Коши, в возрастающем модельном потенциале  $U(x)$  [98]. Методы аппроксимации «остроконечных» экономфизических распределений  $f(x)$  с «тяжелыми хвостами» кратко рассмотрены в недавно изданном учебнике «Physics of stochastic processes» [115, с. 268—272] и более подробно в книгах [97, 98] и статьях [99, 100].

Заметим, что ключевые физические характеристики биржи как социальной системы — число игроков и их распределение по «энергopodobной» покупательной способности — составляют коммерческую тайну и в экономфизической литературе не обсуждаются. Тем не менее, оценочное число участников торгов на главных мировых биржах (от нескольких тысяч до десятков тысяч в день) и преобладание мелких сделок, не влияющих на стратегии крупных игроков, иллюстрируют как неоднородность, так и весьма немакроскопический характер этих систем несмотря на значительный объем доступных для них данных (миллионы точек). Возможно, именно этим обстоятельством обусловлены расхождения в параметрах и даже в характере распределений (нормальное и лог-нормальное, «полет Леви», усеченное распределение Леви, распределение Стьюдента и т. д.), используемых разными авторами. Наличие больших флуктуаций и обратных степенных «хвостов» для этих данных объяснялось, в частности, сильным влиянием на статистику биржи крупных (т. е. весьма немногочисленных) покупок и продаж [109, 114].

### 3.3.2. Фрактальная размерность биржевых рядов

Другой подход к анализу биржи основан на приближенной масштабной инвариантности временных рядов [102, 116]. «Самоподобие» графиков динамических данных, взятых в различных масштабах времени, позволяет рассматривать их как *фрактальные* геометрические объекты. Фрактальный характер биржевого ряда впервые отметил в

1963 г. Бенуа Мандельброт на примере динамики цены на хлопок [116]. Характеристикой таких графиков служит (хаусдорфова) *фрактальная размерность*  $D$ , оцениваемая по предельному соотношению  $N(\delta) \sim \delta^{-D}$ :

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)} = -\lim_{\delta \rightarrow 0} [\log_{\delta} N(\delta)], \quad (5)$$

где  $N$  — число одинаковых элементов (например, кругов), покрывающих фрактальный объект,  $\delta$  — размер элемента (радиус круга, рис. 10, а). В реальных биржевых рядах последовательность покрытий ограничена снизу минимальным интервалом времени  $\Delta t$  между двумя «отсчетами» цен акций. Фрактальной размерностью  $D$  ряда данных определяется *индекс Херста*  $H = 2 - D$ , отражающий способность стохастического процесса к сохранению определенной тенденции во времени:

$H > 0,5$ : *персистентность* (наличие тренда к повышению или понижению цены);

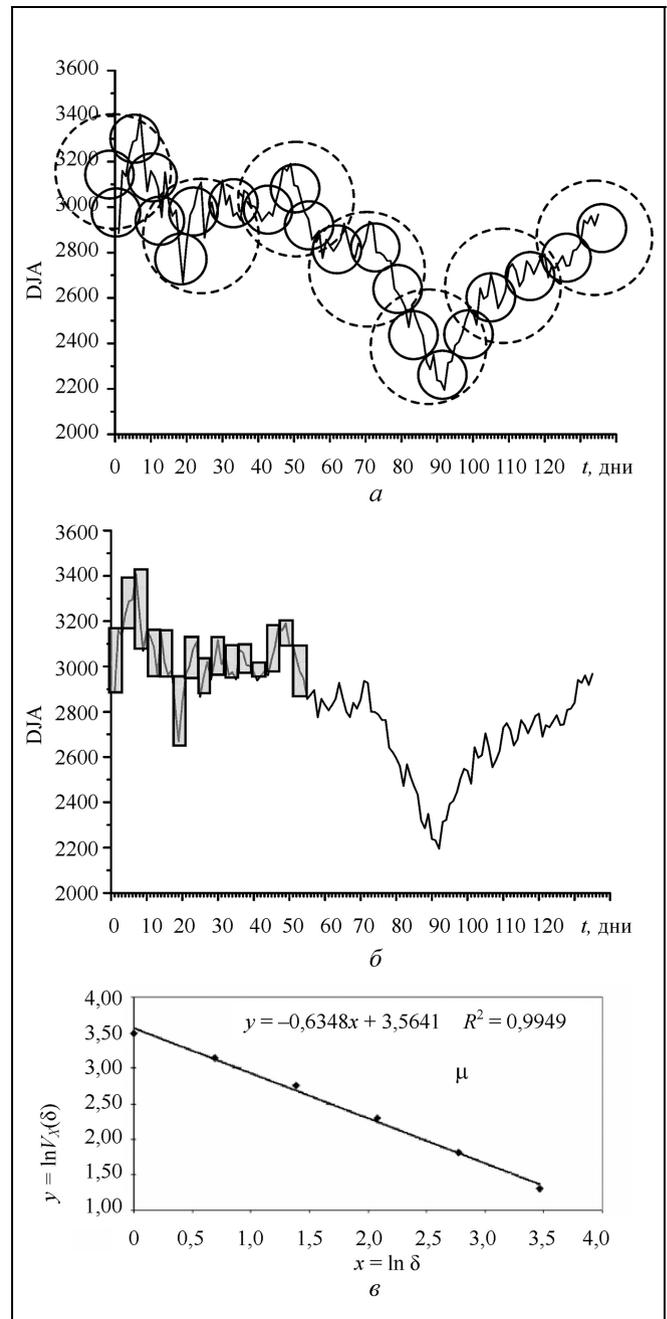
$H < 0,5$ : *антиперсистентность* (антикорреляция последовательных сдвигов цены);

$H \approx 0,5$ : отсутствие корреляций ценовых сдвигов (случайные блуждания).

Значениями отклонения  $H$  от 0,5 характеризуются «интенсивности» тренда (к повышению или к понижению) либо антикорреляций (уплощенный участок графика) [102].

Определение состояния биржи (и связанных с ней отраслей экономики) и предсказание его вероятных изменений по свойствам имеющихся временных рядов, включая фрактальную размерность, составляет предмет *технического анализа*: прикладного направления в экономике и финансах, посвященного анализу данных, их динамике и оптимальным стратегиям игроков [89]. (Теоретическое описание биржи в этих терминах относят к *фундаментальному анализу*). Однако применимость для таких целей индекса Херста, вычисляемого из формулы (5), невелика ввиду медленной сходимости ряда  $N(\delta)$  с уменьшением размера составляющих элементов. В этих условиях среднюю фрактальную размерность можно определить лишь для длинных интервалов, на которых тенденции временного ряда успевают измениться. В работах Дубовикова и соавт. [102, 118] был предложен алгоритм *минимального покрытия* фрактального графика функции  $f(t, \Delta t)$  прямоугольниками  $A_i \times \delta$ , где  $A_i = \Delta f_i$  — изменение значения  $f$  на  $i$ -м интервале  $\Delta t = \delta$  (рис. 10, б). С его помощью удалось построить быстро сходящиеся ряды площадей покрытия графика  $\Sigma(A_i \cdot \delta) = V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu}$  с новым *индексом фрактальности*  $\mu = D - D_T$  (где  $D_T$  — топологическая размерность, равная 1 для функции

одной переменной, рис. 10, в). Использование индекса  $\mu$  для оценки персистентности ряда на коротких интервалах (где оценка (5) по индексу Херста не работает) выявили локальные нарушения самоподобия на участках с выраженным



**Рис. 10. Фрактальная размерность биржевых рядов:** а — обычное (штриховые и сплошные окружности — два шага построения) и б — минимальное (прямоугольники) покрытие фрактального ряда индекса Доу—Джонса с 27.10.2008 по 8.05.2009 [117]; в — зависимость  $V \sim \delta^{-\mu}$  для курса акций компании «Coca-Cola» (интервал в 32 дня) в двойных логарифмических координатах (см. [102] и текст)

трендом: *подавление мелкомасштабных флуктуаций при наличии крупномасштабных* (сравн. график на рис. 10, б в интервалах 70—100 и 100—130 дней). Степень общности этого наблюдения обсуждается [102].

### 3.3.3. Экономические кризисы

Несмотря на длительное развитие технического анализа (среди его основателей был Чарльз Доу, в 1896 г. вместе с Эдвардом Джонсом предложивший один из наиболее известных биржевых индикаторов США Dow Jones Average (DJA) [117]; первое издание фундаментальной монографии Эдвардса и Маджи «Технический анализ биржевых трендов» [89] вышло в 1948 г.), существующие методы не позволяют прогнозировать наиболее известные негативные явления экономики: финансовые и экономические кризисы (см. также работу [102]). Статьи, посвященные моделированию кризисов, появились в физических журналах с конца 1990-х гг. и к 2001 г. составили заметную долю работ по эконофизике [119—123]. Наиболее значимым среди них стало исследование Йохансена и Сорнета [121], рассмотревших аналогии как экономической, так и популяционной динамики с фазовыми переходами в «неживых» системах.

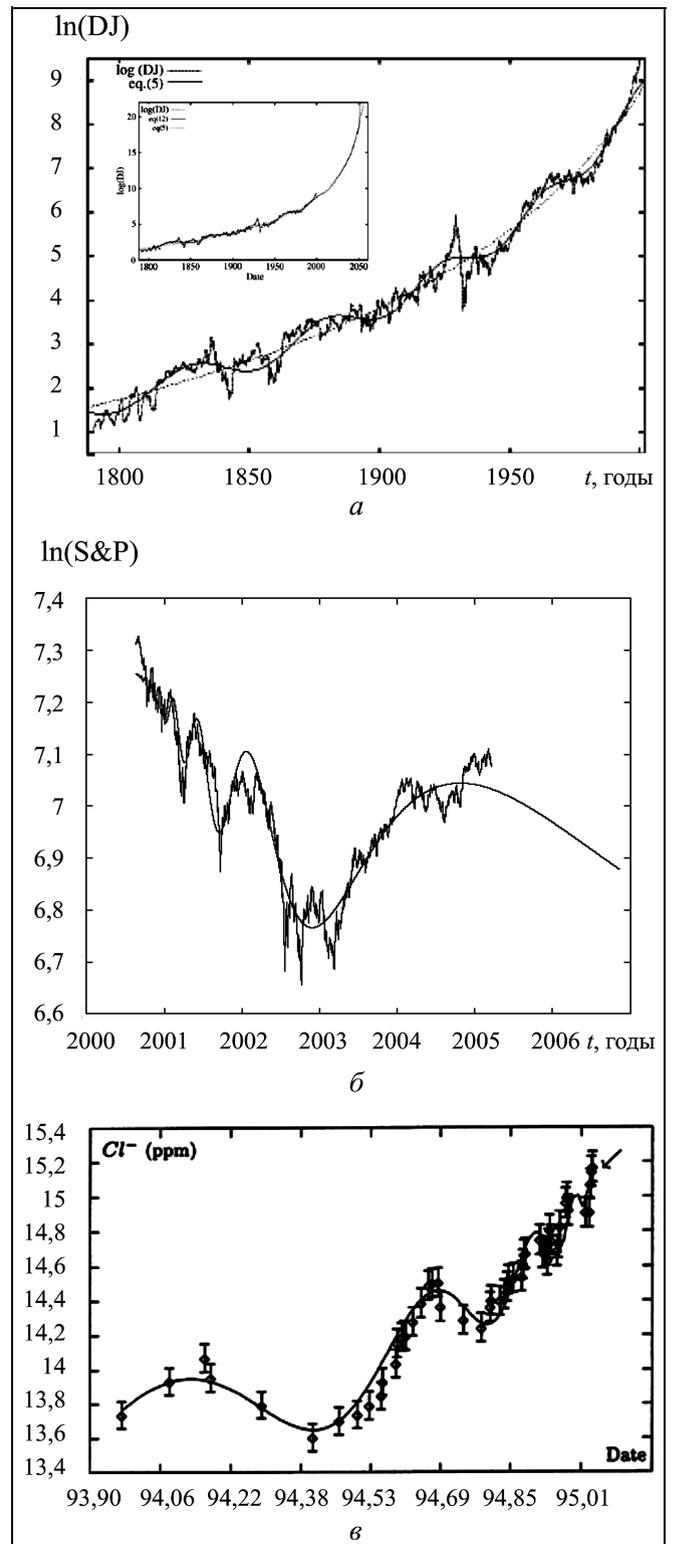
В основу анализа авторы [121] положили гиперболический рост населения Земли в историческом времени, впервые отмеченный в 1960 г. [124] и обсуждавшийся во многих работах второй половины XX в. (см. [125, 126] и цитированную там литературу):

$$P \sim (t_0 - t)^{-\alpha}, \quad (6)$$

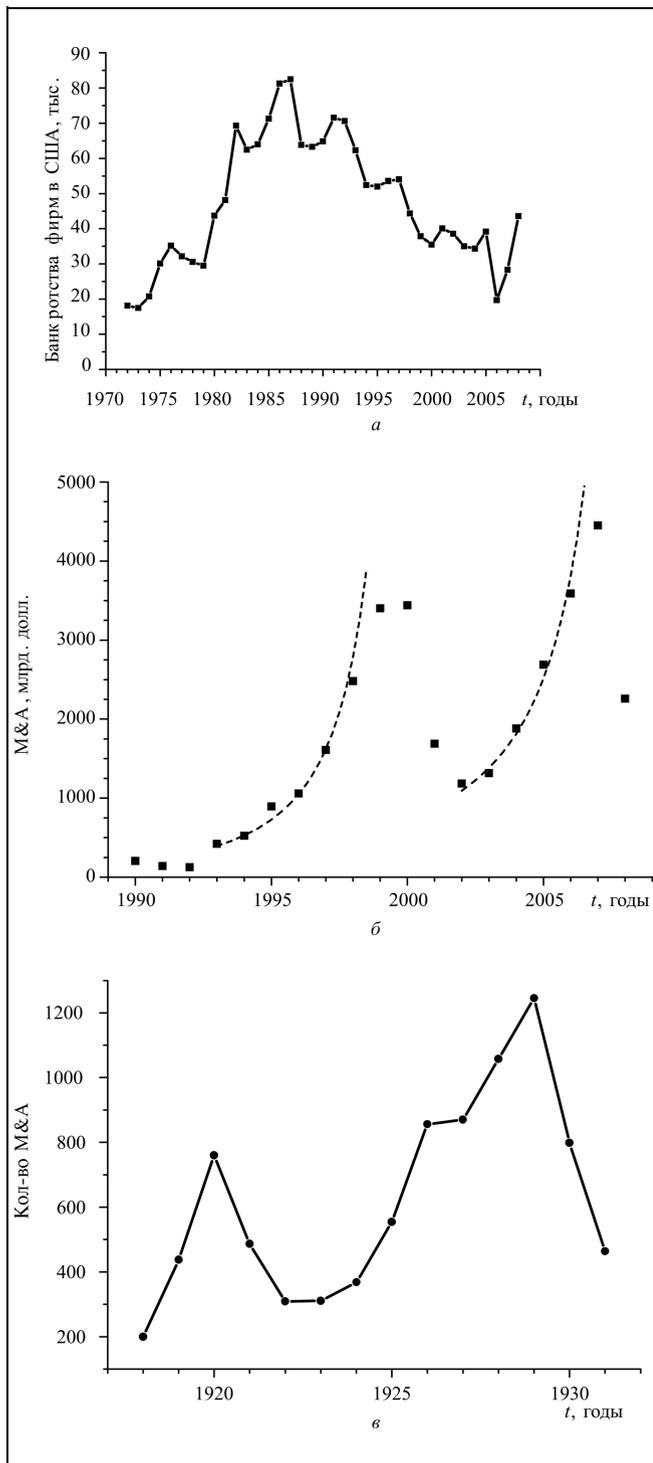
где  $P$  — численность населения,  $\alpha \approx 1,5-2$ , а «критическая точка»  $t_0$  лежит в интервале 2030—2060 гг. Эту закономерность, установленную по данным переписей в последние столетия и оценкам для более раннего времени [125], авторы дополнили аналогичной эмпирической динамикой роста мирового ВВП и биржевых индексов (для которых получили  $\alpha \approx 1$ ). Расходящуюся зависимость (6), в соответствии с феноменологией критических явлений [29] указывающую на приближение к точке фазового перехода, при этом детализировали на основе теории Ландау [127] формальным разложением в комплекснозначный ряд по параметру порядка  $F(x) = I(t_0) - I(t)$ , где  $I$  — измеряемая величина,  $x = t_0 - t$  (несмотря на очевидное  $I(t_0) = \infty$ ):

$$\begin{aligned} d(\ln F)/d(\ln x) &= \\ &= (\alpha + i\omega)F(x) + (\beta + ik)F^2(x) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Нулевому приближению  $d(\ln F)/d(\ln x) = \text{const}$  ( $\omega = 0$ ) отвечает гиперболическая асимптотика (6),



**Рис. 11. Феноменология критических явлений:** а — подгонка временного ряда индекса Доу—Джонса во втором приближении (7а) (см. текст) в полулогарифмическом, на врезке в линейном масштабе [121]; б — кризис 2001—2003 гг. как «обращенный пузырь» на фондовом рынке США [129]; в — зависимость концентраций ионов в термальных водах накануне землетрясения в Японии [130]



**Рис. 12. Конденсация капитала при свободном расширении экономики:** *a* — «снижение температуры»: число банкротств фирм в США с 1972 по 2008 г. (*U.S. Census Bureau, Statistical Abstract of the United States, 2009*, <http://www.census.gov/compendia/statab/>); *б* — годовые объемы сделок по слиянию и поглощению (M&A) в США с 1990 по 2008 г. (*U.S. Census Bureau, Thomson Reuters Financial Advisers, Mergers and Acquisitions Reviews, 2005–2008*, <http://www.reuters.com>); штриховые линии: гиперболы  $A(t_c - t)^{-\alpha}$ ; *в* — годовые количества крупных M&A в США с 1918 по 1931 г. (по [135])

а первому — модулирующая логарифмически-синусоидальная («лог-периодическая») динамика

$$F(x) = A + B(t - t_0)^{-\alpha} + C(t - t_0)^{-\alpha} \cos[\omega \ln(t_0 - t) + \phi] \quad (7a)$$

(рис. 11, *a*). Подбором эмпирических параметров ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\phi$  и т. д.) авторы в первом приближении уравнения (7) аппроксимировали демографическую динамику мира в I–XX вв., а во втором приближении — динамику индекса DJI<sup>5</sup> в 1790–1999 гг. На качественном уровне им удалось воспроизвести большинство наблюдаемых отклонений от гиперболического тренда, однако позднейший ход индекса в 2000–2001 гг., по нашим данным, не соответствовал предложенной модели.

В последующих работах Сорнета и соавт. [103, 128, 129] разложение по параметру порядка использовалось для детального моделирования биржевой динамики — в частности, трендов на повышение и понижение курсов акций, а также «пузырей»: периодов ажиотажного спроса на определенные товары с завышением и последующим резким падением их цены (рис. 11, *б*). Во втором и третьем порядках разложения (7) временные ряды воспроизводились количественно, однако обилие варьируемых параметров затрудняет их содержательную экстраполяцию. В противоположность обычно наблюдаемым лог-периодическим колебаниям сложной системы вблизи катастрофического события (формула (7a)), при которых осцилляции «сгущаются» с приближением к критической точке [130] (рис. 11, *в*), в цитируемых работах точка  $t_0$  предшествовала моделируемой динамике; авторы назвали такую теоретическую конструкцию «обращенным пузырем» (*anti-bubble*) [103].

Заметим, что работы данного направления не предсказали биржевой кризис 2001 г. в США (снижение индекса Доу–Джонса с конца мая и его «вертикальное» падение с 4 по 21 сентября) с последовавшей рецессией [117], хотя подобные явления прогнозировались в рамках обычных экономических теорий [131]. О предсказании кризиса 2008 г. экономическими методами в литературе также не сообщалось, но в последние годы отмечается новый всплеск интереса к этой проблеме [132–137]. В частности, в нашей работе [135] кризисы 2001 и 2008 гг. связывались с предшествовавшими им волнами слияний и поглощений (*Mergers & Acquisitions, M&A* [138]): неконтролируемой «конденсацией капитала», дезорганизующей уп-

<sup>5</sup> Значения индекса до 1896 г. реконструировали по ценам составляющих его акций.



равление укрупненными фирмами [139] и, в свою очередь, вызванной ослаблением конкуренции при экономической экспансии США в 1990-е и 2000-е гг. (рис. 12). В интернет-публикации 2010 г. [137] из анализа динамики цен на золото в 2003—2010 гг. (гиперболический рост с лог-периодической модуляцией, формула (7a)) был предсказан крах «золотого пузыря» весной — летом 2011 г. В реальности цена золота на Лондонской бирже с августа 2010 г. к августу 2011 г. выросла на треть (до ~1600 долл. за унцию) и после ряда скачков (сентябрь 2011 г.: ~1900 долл.) снижается в марте 2012 г. с 1780 до 1650 долл. за унцию [140].

### 3.3.4. Физическое содержание экономических категорий

Установление связи между фундаментальными понятиями экономики и физики неоднократно декларировалось в литературе как очевидная «эконофизическая» задача [82, 84]. (Примером такой связи может служить идея равновесия спроса и предложения, лежащая в фундаменте классической экономической теории). Тем не менее, работы в этом направлении весьма фрагментарны. Основная часть эконофизической периодики посвящена довольно узкому кругу проблем: обработке количественных данных о состоянии экономики и финансов методами, развитыми в физике [93], и математическому моделированию получаемых закономерностей. Поскольку для социальных процессов обычно наблюдаются лишь косвенные аналогии с «неживыми» сложными системами, прямой перенос физической терминологии на экономику вряд ли обоснован.

Предположения о «физическом смысле» экономических понятий и явлений (в том числе весьма глубокие) возникают и внутри теоретической экономики. Так, в обзорной статье [141] детально сопоставлено описание равновесных состояний и путей достижения равновесия в классической термодинамике и в неоклассических экономических теориях. Ряд авторов анализирует так называемую «гравитационную зависимость» международных торговых потоков  $F_{ij}$  от ВВП партнеров ( $M_i$ ,  $M_j$ ) и расстояния  $R_{ij}$  между ними<sup>6</sup>:  $F_{ij} \sim M_i^\alpha M_j^\beta / R_{ij}^\gamma$  (где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — эмпирические коэффициенты), установленную в 1960-е гг. [142]. Возрастающее число ис-

следований посвящено влиянию сделок на состояние рынка (market impact), которое отражается количественным параметром  $R = \Delta S_i / V_i$  (отношением изменения цены товара до и после покупки (продажи) к объему сделки) и соответствует влиянию агента на «потенциал» мультиагентной системы [143]. В большинстве «экономико-физических» работ анализируют применимость понятия энтропии к экономическим процессам, взаимосвязь «деньги — энергия», распределения дохода и богатства (прежде всего закон Парето) и, в последние годы, сетевую структуру экономических отношений.

Поскольку временные ряды цен акций, биржевых индексов и курсов валют отличаются от динамики броуновской частицы нестационарностью стохастического процесса и корреляциями его характеристик (доходности, волатильности), стандартные статистические параметры — такие как моменты распределений — для них уже не существуют или не дают полного макроскопического описания [110, 111]. «Степень неопределенности» этих данных лучше характеризует *шенноновская энтропия*  $H$ , введенная в середине XX в. в теории информации [144]. Для величины  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , принимающей дискретные значения  $\{x_i\}$  со значениями вероятности  $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ ,  $\sum p_i = 1$ , она определяется как

$$H(X) = -\sum p_i \log_m(p_i). \quad (8)$$

При основании логарифма  $m = e = 2,71\dots$  энтропия выражается в «натуральных» единицах (*нат*), при  $m = 2$  — в «информационных» единицах (*бит*). В том случае, если  $X$  равномерно распределена между  $N$  дискретными значениями ( $p_1 = p_2 = \dots = p_N = 1/N$ ), энтропия (8) в «натуральных» единицах принимает вид  $H(X) = -\ln N = S/k$ , где  $S$  — обычное определение энтропии в статистической физике,  $k$  — константа Больцмана. (В общем случае  $0 \leq H(X) \leq S/k$ ). Для пары величин  $X = \{x_i\}$  и  $Y = \{y_j\}$ , распределенных с вероятностями  $\{p_X(x_i)\}$  и  $\{p_Y(y_j)\}$ , вводятся полная энтропия  $H(X, Y)$ , условная энтропия  $H(X|Y)$  и общая информация  $I(X; Y) \geq 0$ , характеризующая корреляцию между распределениями  $X$  и  $Y$ :

$$H(X, Y) = -\sum_j \sum_i p(x_i, y_j) \log_m[p(x_i, y_j)], \quad (9a)$$

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(X) = -\sum_j \sum_i p(x_i, y_j) \log_m[p(x_i, y_j)/p(x_i)] \quad (9b)$$

<sup>6</sup> Подобно квазисилам отталкивания в моделях движения «живых частиц» (см. [1]), для торговых потоков между странами, понимаемых как «силы», не выполняется третий закон Ньютона:  $|F_{ij}| \neq |F_{ji}|$ .

или

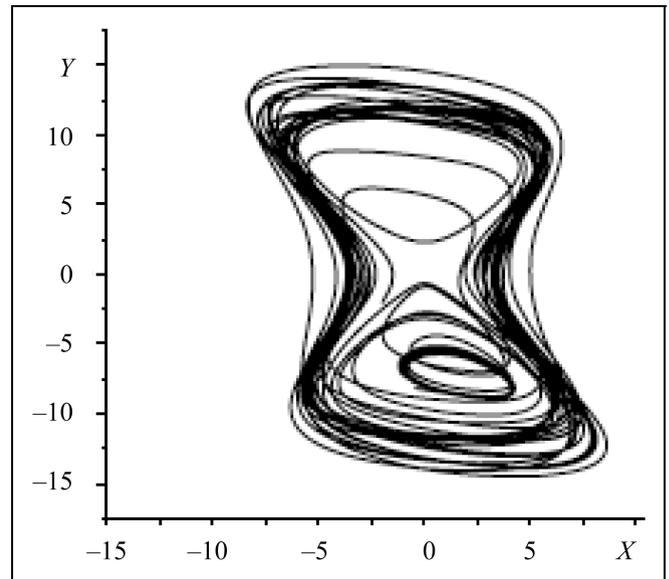
$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= H(X, Y) - H(Y) = \\
 &= -\sum_j \sum_i p(x_i, y_j) \log_m [p(x_i, y_j)/p(y_j)], \\
 I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) = \\
 &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) = \\
 &= \sum_j \sum_i p(x_i, y_j) \log_m [p(x_i, y_j)/p(x_i)p(y_j)] \quad (9в)
 \end{aligned}$$

(для независимых  $X$  и  $Y$   $I(X; Y) = 0$ ). Соотношения (7) и (8) обобщаются на непрерывно распределенные случайные величины [144].

С помощью соотношений (8) и (9а)—(9в) выявляют корреляции и персистентность финансовых временных рядов [145, 146]. В частности, расчет энтропии собственных значений корреляционной матрицы для цен акций показал неустойчивость американского рынка к кризисам, сохраняющуюся с 2002 г. [147]. В работах Чена (см. [148, 149] и цитированную там литературу) обсуждаются перспективы «термодинамического» описания экономики, основанного на шенноновской энтропии неравновесных мультиагентных систем вместо обычной статистической (гиббсовской) энтропии. К этому направлению примыкает *поведенческая теория финансов* (behaviorial finance), где широко применяются агентные модели и формализм теории игр [105, 107, 110].

До выработки единой общепринятой терминологии формулами (8) и (9а)—(9в) пока задают как *информационную энтропию* системы из  $N$  состояний, занимаемых с вероятностью  $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ , так и *количество информации*, вмещаемое такой системой. Использованию информации для моделирования динамики биологических и социальных систем, включая экономику, посвящена книга Д.С. Чернавского [150]. На основе соотношений (9а)—(9в) в ней рассмотрен процесс рождения *ценной информации* в детерминистских системах, проходящих через состояние *динамического хаоса*. Динамику таких систем в синергетике (см. также книгу [85]) качественно воспроизводит *фазовый портрет*: в простейшем случае проекция всех многомерных траекторий системы на плоскость  $(q, \dot{q})$  одной из ее обобщенных координат  $q$  и ее производной по времени  $\dot{q} = dq/dt$ . На такой проекции визуализируются точки устойчивых решений и предельные фазовые траектории  $\dot{q}(q)$ , показывающие асимптотическое поведение системы, точки и линии неустойчивой динамики, а также области хаоса, или *странные аттракторы* (рис. 13).

В хаотическом состоянии (которому в фазовом пространстве соответствует «перемешиваю-



**Рис. 13.** Фазовые траектории модели «солнечного динамо», описывающей медленные флуктуации солнечной постоянной (см. [1, п. 1.1]):  $X(t)$  и  $Y(t)$  — соответственно токи в экваториальном и меридиональном контурах. «Восьмерка» из хаотически изменяющихся траекторий  $Y(X)$  — область странного аттрактора, в которую система переходит из внутренней и внешней областей параметров  $(X, Y)$  с течением времени  $t$  [151]

щий слой») решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы, неустойчивы к малым возмущениям параметров. Внутри перемешивающего слоя траектория системы непредсказуемо изменяется, а на выходе из него (например, при завершении политического кризиса в стране) стабилизируется. *Развивающиеся системы*, способные в состоянии хаоса генерировать ценную информацию, имеют ряд обязательных признаков: диссипативность (потребление энергии от внешнего источника), нелинейность (с возможностью сильного отклика на слабое воздействие) и вытекающая из соотношений (8) и (9) *мультистабильность*: дискретный набор устойчивых состояний  $(1, 2, \dots, N)$ .

Попаданию системы в  $i$ -е состояние, т. е. «выбору» состояния, соответствует рождение информации, а случайному переходу в другое состояние под воздействием флуктуаций — потеря информации («забывание»). Новая информация оказывается *ценной*, если условная вероятность некоторого события в момент времени  $t$  — получения прибыли на бирже, закрепления нового слова в языке, выживания биологического вида и т. д. — при нахождении системы в выбранном состоянии  $Y = i$  выше его безусловной вероятности в тот же момент времени  $P(X = x \in A | Y = i) > P(X \in A)$ , где  $A$  — «целевое» множество значений случайной величини



ны  $X$ , и  $Y \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Новизну и универсальность «информационного» подхода к описанию биологических и социальных процессов иногда понимают как невозможность свести теорию развивающихся систем к одним лишь фундаментальным законам (современной) физики [150]. (При отсутствии ясного физического содержания у сегодняшних терминов «информация» и «информационная энтропия» это действительно нелегко сделать).

На основе теории информации Д.С. Чернавский интерпретировал физическую функцию денег как средства, минимизирующего энтропию обмена в экономике [150, *гл. 8*]. Этот вывод можно иллюстрировать, поставив в соответствие  $N$  товарам вершины графа, возможным актам их обмена — ребра этого графа и определяя энтропию обычным образом как  $S = K \ln W$ , где  $W$  — сумма состояний обмена (число ребер),  $K = \text{const}$ . «Бартерную» экономику с прямым обменом всех товаров в этом случае представляет полный граф с  $W = N(N - 1)/2$  ребер (рис. 14, *а*), а экономику с деньгами — звезда с  $W = N$  (рис. 14, *б*), так что для больших  $N$

$$S_{\text{барт}} = \ln N + \ln(N - 1) - \ln 2 \approx 2 \ln N = 2S_{\text{ден}}$$

(денежная экономика «вдвое эффективнее» бартерной). Моделированию спонтанного возникновения преобладающего предмета обмена (и, далее, всеобщего эквивалента) в товарной экономике посвящены многие теоретические работы [152, 153].

Расхожее словосочетание «энергия денег» в последнее десятилетие было детализировано в работах Яковенко и соавт. («кинетическая теория де-

нег») [154—157], а также других исследователей, применивших методы статистической физики к анализу обмена в экономике [101, 157—159]. Эмпирической основой этого направления стали доступные через Интернет данные о благосостоянии населения ряда развитых стран (Англии и США [154], Австралии [155]), демонстрирующие обратное экспоненциальное распределение по доходам  $\sim e^{-Ar}$  для низкооплачиваемого большинства (95 %) и обратный степенной «хвост» распределения  $\sim r^{-\alpha}$  для богатой части населения (рис. 15, *а*). «Больцмановской» зависимостью плотности вероятности дохода  $p(r) \sim e^{-Ar}$  порождается также экспоненциальное кумулятивное распределение доли населения с доходами, меньшими заданной величины  $x$ :

$$N(r < x) = \frac{1}{N_0} \int_x^\infty p(r) dr = Be^{-Ax}.$$

Экспоненциальное падение доходов воспроизводилось авторами в модели случайных столкновений частиц с обменом локально сохраняющейся «энергией», заимствованной из кинетической теории газа:  $m_i(t) + m_j(t) = m_i(t + \Delta t) + m_j(t + \Delta t)$ , где  $\{m_k(t)\}$  и  $\{m_k(t + \Delta t)\}$  соответственно обозначают «энергии» агентов до и после столкновения, моделирующего экономическое взаимодействие, и  $\Sigma m_k = \text{const}$  (глобальное сохранение «энергии»). Энергоподобная субстанция, сохраняющаяся в столкновениях, в работах Яковенко и соавт. была весьма неудачно названа «деньгами» [156] (фактически же моделировалось перераспределение богатства при обмене товаров и услуг, и разность  $\Delta m_i = m_i(t + \Delta t) - m_i(t)$  означала выигрыш либо проигрыш  $i$ -го агента в акте обмена). Ослабление условия  $\Sigma \Delta m_i = \emptyset$  до локального сохранения богатства в среднем при ряде дополнительных предположений (например,  $\Delta m_i \sim m_i^\beta$  [156]) позволяет воспроизвести обратную степенную асимптотику  $N(r > m) \sim m^{-\alpha}$  для больших  $m$  [159].

В классической экономической теории распределение благосостояния в обществе чаще характеризуется кривой Лоренца  $L(x < M)$  (кумулятивным дискретным распределением долей дохода  $0 < M < 1$  по равным долям населения) и коэффициентом Джини  $G \in [0, 1]$ : отношению площади между ломаной линией  $L(x < M)$  и прямой  $L_0 = M$  (отвечающей уравнительному распределению дохода  $p(x) = dL_0/dM = \text{const}$ ) к площади

треугольника  $\int_0^1 L_0 dx$  (рис. 16). Значения  $G = 0$  и

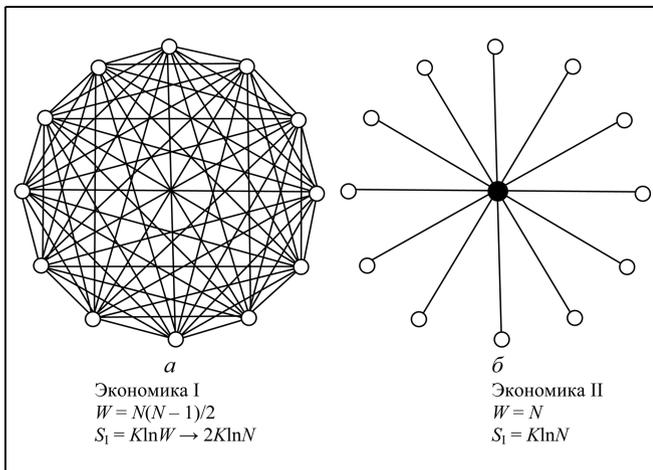
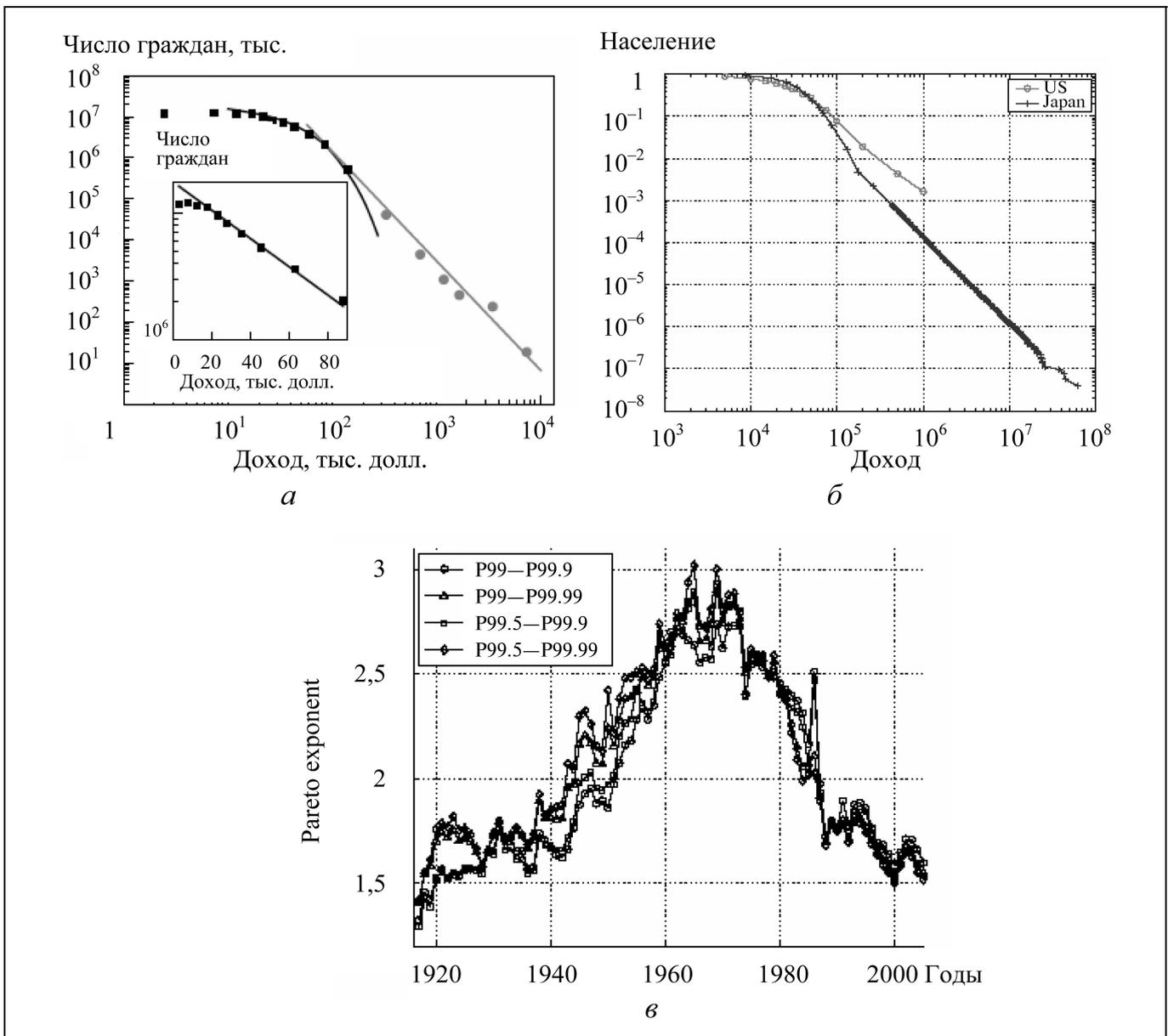


Рис. 14. Возможности обмена товаров в бартерной экономике I (*а*) и в денежной экономике II (*б*; закрашенной вершине соответствует всеобщий эквивалент обмена, т. е. деньги)



**Рис. 15.** Кумулятивное распределение дохода в двойных логарифмических координатах: а — США, 1998 г., на врезке координаты полулогарифмические [101]; б — США (•) и Япония (+), 2000 г. [82]; в — показатель  $\alpha$  распределения Парето  $\sim 1/r^\alpha$  для богатой части населения США в XX в. [160]

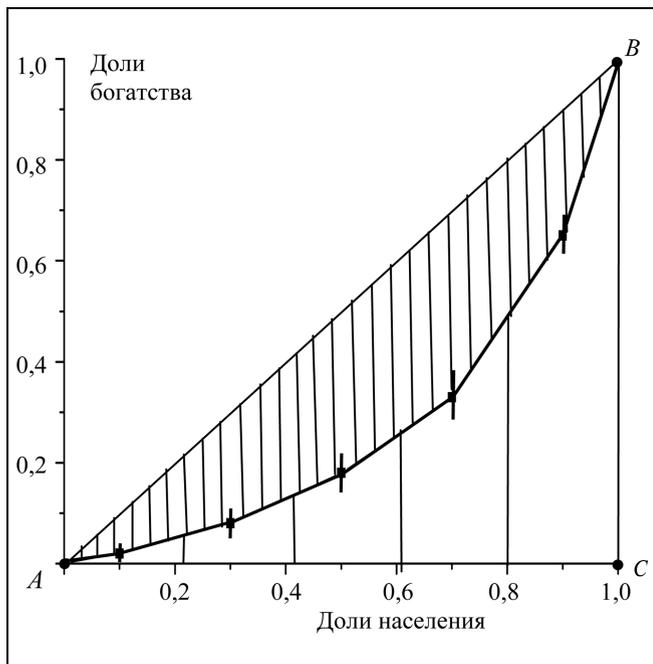
$G = 1$  соответственно обозначают «полное равенство» и «крайнюю несправедливость»; в современных США  $G \approx 0,5$  [98, 161]. На наш сторонний взгляд, оба эти инструмента скорее затушевывают, чем визуализируют имущественное неравенство, и реакция экономистов на объективный подход физиков к эмпирическим данным была довольно болезненной (см. далее). Само же кумулятивное распределение доходов населения в большинстве экономических теорий с середины XX в. полага-

ли логарифмически нормальным («лог-нормальным») [162]

$$N(r < x) = \frac{a}{x} e^{-b(\ln x)^2}, \quad (10)$$

основываясь на гипотезе о случайных изменениях логарифма благосостояния  $\{w_i\}$  экономических агентов с течением времени:

$$\ln w_i^{(t+1)} = \ln w_i^{(t)} + \xi_i, \quad (10a)$$



**Рис. 16.** Стилизованное изображение кривой Лоренца  $L(x > M)$ , отражающей кумулятивное распределение дохода по 20%-м долям населения страны (*квинтилям*), расположенным по возрастанию благосостояния. Жирными вертикальными отрезками обозначены погрешности в определении среднего дохода (по налоговым данным) для соответствующей доли населения. Коэффициент Джини  $G$  равен отношению площади заштрихованной части графика к площади треугольника  $ABC$ ; отрезок  $AB$  соответствует кривой Лоренца  $L_0$  при уравнительном распределении дохода (см. текст)

где  $\xi_i$  — стохастическое изменение богатства  $i$ -го агента на  $(t + 1)$ -м шаге случайного процесса [163].

Не следующая из выражения (10) обратная степенная асимптотика распределений больших доходов (*закон Парето*  $N(r > x) \sim x^{-\alpha}$ ) известна в экономике более 100 лет [160, 163]. К лог-нормальному виду с «хвостом Парето», в частности, приближается кумулятивное распределение доходов в современной Японии (рис. 15, б). Уменьшение показателя степени  $\alpha$  соответствует повышению доходов богатейшей части общества, т. е. увеличению неравенства. Как экономические [156], так и эконометрические исследования [160] указывают на рост неравенства в США с 1970-х гг. (рис. 15, в).

Лог-нормальное распределение благосостояния и асимптотика Парето неоднократно воспроизводились в математических моделях, однако «экономический смысл» принятых допущений (включая логарифмические случайные блуждания (10а)) оставался невыясненным [163]. В частно-

сти, обратную степенную асимптотику распределения богатства  $P(w)$  в математической экономике (см. [160]) и, позднее, экономфизике [164] получали усложнением мультипликативного случайного процесса (10а), представляя благосостояние агента в виде  $w = ax + b$ , где коэффициенты  $a$  и  $b$  также являлись случайными величинами, причем  $a \rightarrow 1$  для больших  $x(t)$  и  $a \rightarrow \infty$  при  $w(t) \rightarrow 0$  («отталкивание от нуля»).

Применение кинетической теории газов к описанию рынка вызвало резкую критику профессиональных экономистов [165], справедливо указавших на отсутствие глобального «сохранения денег» в экономике и на игнорирование фактора производства в кинетических моделях<sup>7</sup>. Однако сами модели этими возражениями не опровергаются, а от допущения только локального (или даже локального в среднем) сохранения «энергии» становятся лишь более гибкими. Более существенным представляется то обстоятельство, что «больцмановские» 95 % населения в основном составляют наемные работники (живущие на зарплату, хранящие деньги в сберкассах, делающие основные покупки в супермаркетах и весьма редко участвующие в торге со свободно устанавливаемой ценой), которых вряд ли можно считать активными рыночными агентами. Как экспоненциальное падение, так и асимптотика Парето в распределении доходов могут объясняться совсем другой причиной: структурой социальных систем, которой в стационарных условиях отвечают экспоненциально масштабируемые сети с безмасштабным управляющим ядром [28]. В этом случае искомое распределение  $P(w)$  непосредственно вытекает из гипотезы  $w_i \sim k_i$ , где  $k_i$  — порядок  $i$ -го узла в сети, хотя более естественной «обогащающей переменной» следовало бы считать важность, или нагрузку узла (см. п. 3.2.3).

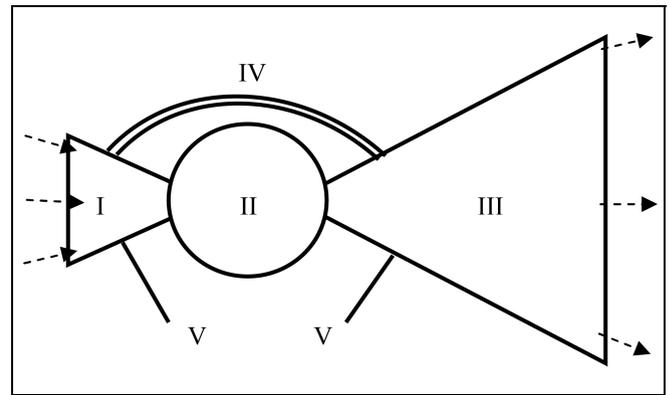
Отметим, что различные формы локального «сохранения энергии в среднем» в кинетической модели обмена с  $N$  агентами как поставщиками товаров и услуг равнозначны симметричному распределению цены товара вокруг его стоимости, для чего требуется нереализуемое условие  $N \rightarrow \infty$ . В конечной совокупности агентов — в данном слу-

<sup>7</sup> В цитируемой статье четырех известных теоретиков «Тревожные тенденции в экономфизике», помимо кинетических моделей, критиковались «предсказания конца света» по временным рядам и качественная визуализация асимптотики  $\sim r^{-\alpha}$  в двойных логарифмических координатах без привлечения современных инструментов эконометрики. По нашему мнению, эта полемика действительно отражает «столкновение культур» [94]: развитая культура измерений в физике, по сравнению с общественными науками, выработала более простые и объективные формы анализа экспериментальных данных.

чае включающей в себя наемных работников — стремление индивидуумов к максимальной выгоде, по-видимому, должно порождать асимметричные распределения с тенденцией к завышению цены в каждой сделке. Подобным нарушением локального «сохранения денег» при отсутствии их глобального сохранения на качественном уровне можно объяснить явление *инфляции*.

В работах последних лет [166—172] учитывается и моделируется сетевая структура экономических отношений (см. также п. 3.2). В таких работах «энергия» (благополучие) перераспределяется по априорно задаваемым правилам между узлами регулярной решетки или вершинами растущих сетей Барабаши—Альберт. В численном моделировании сети с «рождением» и «смертью» узлов, случайным образованием ребер и предпочтительным переходом энергии к «богатым» узлам с большей энергией или (и) более высокой связностью, аналогично моделям наследования в экономической теории [160], получено кумулятивное распределение дохода, промежуточное между экспоненциально убывающим и лог-нормальным, с обратным степенным «хвостом» [166]. Сам по себе «хвост Парето», являясь частным случаем обратного степенного закона *Ципфа*, справедливого для многих социальных систем [56, 109], воспроизводится и на бесструктурной совокупности агентов [173], однако модельные распределения в этом случае не имеют негиперболического «ядра» (см. рис. 15, а, б).

Методы статистической физики применялись к анализу сетей в бизнесе [48, 167, 172]; на сетях размещаются агенты в современных кинетических моделях обмена [171]. Также с помощью сетей описывают корреляции и кластеризацию ценных бумаг [168, 169] («топологию рынка», [98, гл. 8]) и структуру биржевых индексов [170]. В недавней работе [49] обсуждалась топология мировой сети глобального корпоративного управления, составленной из взаимозависимых транснациональных корпораций (ТНК). Структуру сети отражает ориентированный взвешенный граф, вершины которого соответствуют фирмам, ориентированные ребра (стрелки  $A \rightarrow B$ ) отражают нахождение части ( $W_{AB}/W_A$ ) активов фирмы  $A$  в собственности фирмы  $B$ , а доля фирмы  $B$  в управлении фирмой  $A$  определяется отношением ( $W_{AB}/W_A$ ), стоимостью  $W_B$  фирмы  $B$ , а также набором и ориентацией путей между  $A$  и  $B$  через другие вершины графа. Максимальный связный компонент сети, включающий в себя 94 % операционных доходов всех ТНК, имеет конфигурацию асимметричного «галстука-бабочки» (bow-tie): он состоит из входящей и выходящей областей, соединенных ядром, и периферийных элементов («труб» и «усиков», рис. 17). В корпора-



**Рис. 17. Основные части максимального связного компонента (МСК) в мировой сети транснациональных корпораций (ТНК):** *I* — входящий конус (0,6 %, 2,2 %), *II* — ядро (0,7 %, 18,7%), *III* — выходящий конус (15,1%, 59,8%), *IV*, *V* — «трубы» и «усики» (19,6%, 13,5%). Цифры в скобках: доля от общего числа ТНК (43 060, из них 15 491 в МСК) и доля операционных доходов всех ТНК, приходящиеся на каждую часть [49]

тивном ядре с высокой взаимосвязанностью узлов находится менее 300 корпораций (из них 3/4 — финансовые); 737 крупнейших держателей их акций контролируют около 80 % ТНК во всем мире [49].

В математизированных областях *теории финансов* и *финансовой инженерии* формализм физики стохастических процессов применялся задолго до возникновения эконофизики. В частности, дифференциальными уравнениями со случайными приращениями переменных описывают динамику цен на *производные ценные бумаги (деривативы)*: форвардные и фьючерсные контракты на покупку высоколиквидных товаров в некоторый будущий момент времени по установленной цене, права на будущее приобретение определенных ценных бумаг (*опционы*), долговые обязательства правительств и корпораций и др. [97, 98]. В соответствии с названием, цены различных деривативов математически выражаются через производные цен акций и курсов валют и сильно изменяются во времени, делая «производные финансовые инструменты» привлекательными для спекуляций.

Поскольку производные стохастических величин трудно вычислить с приемлемой точностью по фрактальным рядам данных, в теории финансов цену дериватива  $C(Y, t)$  находят как функцию случайной переменной  $Y(t)$  (цены акций) из дифференциальных уравнений вида  $F(C, Y, C'_Y, C''_Y, \dots) = 0$  (где штрихами обозначены производные). Наиболее известно уравнение Блэка—Шоулза (1973 г.) для «справедливой» цены опциона



$C(Y, t)$  на идеальном финансовом рынке с гауссовыми флуктуациями логарифмической доходности акций вида (10а):

$$\partial C / \partial t = -\frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 \partial^2 C / \partial Y^2 - r Y \partial C / \partial Y + r C, \quad (11)$$

где  $r$  — ожидаемая доходность акций  $Y$ ,  $\sigma^2$  — их (постоянная) волатильность. По своей форме оно относится к уравнениям математической физики и заменой переменных сводится к уравнению теплопроводности, т. е. решается точно (хотя решение имеет лишь ограниченную применимость к реальным финансовым рынкам [97, 98]). Дифференциальным уравнениям теории финансов посвящена обширная литература [174]. Благодаря быстрому росту в три последние десятилетия, суммарная номинальная стоимость производных ценных бумаг к 2008 г. достигла 600 трлн. долл., на порядок превысив общемировую ВВП [175] — что безусловно свидетельствует о нестабильности нынешней мировой экономической системы.

### 3.3.5. Квантовомеханический формализм в описании экономики и финансов

С начала 2000-х гг. к описанию экономики привлекают методы, заимствованные из квантовой механики. Состояние этого «горячего» раздела экономики характеризуют книги [104, 175—178] и журнальные публикации последних лет [179—183]. Фундаментальные проблемы «микро- и макромира» в таких исследованиях обычно не обсуждаются: мерой пригодности модели служат ее удобство и логическая связность<sup>8</sup>. В одной из первых работ данного направления [179] покупки и продажи товара на рынке по некоторой цене  $Y(t)$ , влияющие на его последующую рыночную цену  $Y(t + \Delta t)$  (market impact; см. выше), рассматривались как акты измерения «квантовой» переменной (цены), изменяющие состояние системы. Всем возможным состояниям рынка ставили в соответствие векторы  $|M\rangle_t$  гильбертова пространства, а эволюцию состояний во времени задавали аналогом уравнения Шредингера  $i\partial/\partial t|M\rangle_t = \hat{H}(t)|M\rangle_t$ , где  $\hat{H}$  — линейный оператор («гамильтониан»), построенный из операторов «рождения» и «уничтожения» для наличности и ценных бумаг. Этим методом получено лог-нормальное распределение измене-

<sup>8</sup> «Пока нельзя сказать, насколько квантовое описание финансов лучше стохастического с фундаментальной точки зрения, но вполне возможно, что наблюдаемые корреляции проще и эффективнее анализировать методами квантовой теории» [179].

ний цены акций с дисперсией, пропорциональной интервалу времени между покупкой и продажей.

В серии работ Бааки и соавт. [175, 176] цена акций  $Y(t)$  рассматривалась как случайная переменная, аналогичная координате  $q$  квантовой частицы, а цену опциона  $C(Y, t)$  получали как формальный аналог волновой функции  $\psi(q, t)$  решением

уравнения  $\partial C / \partial t = \hat{H} C(Y, t)$ , где стохастическую зависимость  $C(Y, t)$  от стоимости акций описывал

оператор Гамильтона  $\hat{H}$ . Различные формы гамильтониана соответствовали как модели Блэка—Шоулза (правая часть уравнения (11)), так и другим моделям, используемым в теории финансов. В этом варианте «уравнения Шредингера» функции  $C(Y, t)$  были действительными, а собственные значения гамильтониана комплексными [176]. Доходность производных ценных бумаг в моделях с нелинейным оператором  $\hat{H}$  оценивали методами квантовой теории поля [175], применяемыми в «финансовой инженерии» с 1990-х гг. [177]. Для оценки риска на финансовых рынках Пиотровский и соавт. предложили применять квантовую теорию игр, сформулировав «квантовый антропный принцип»: эволюцию рынка от классической стохастической динамики к квантовой при увеличении доли спекулятивных финансовых инструментов [180]. Российские исследования в области квантовой экономики представлены работами В.П. Маслова [104].

Цитированные исследования примыкают к большому разделу теоретической физики, посвященному применению различных вариантов уравнений Гамильтона к описанию макроскопических систем (таких как нелинейное уравнение Шредингера в гидродинамике) [184]. В работах группы Хренникова в шведском университете Вексьо (Växjö) высказывается значительно более сильное предположение о «квантоподобном» характере процессов, протекающих в человеческом сознании, и обусловленной ими «квантовой» динамике поведения агентов в социальных системах, включая спекулятивный финансовый рынок [178]. В основу описания такой динамики положена концепция Дэвида Бома [185, 186], впервые сформулированная в 1950-е гг. и в отечественной литературе обычно называемая *теорией скрытых параметров*. В ее рамках квазиклассическое выражение для волновой функции  $\psi(q, t) = R \exp[i/\hbar S(q, t)]$  (где  $R = |\psi(q, t)|$  и  $S$  — действие), подставленное в одномерное уравнение Шредингера

$$i\hbar \partial \psi / \partial t = -\frac{\hbar^2}{2m} [\partial^2 / \partial q^2 + V(q, t)] \psi,$$

стандартным путем преобразуется к соотношениям

$$\partial S/\partial t - \frac{1}{2m} (\partial S/\partial q)^2 + \left[ V - \frac{\hbar^2}{2mR} \partial^2 R/\partial q^2 \right] = 0, \quad (12a)$$

$$\partial(R^2)/\partial t + \frac{1}{m} \partial/\partial q (R^2 \partial S/\partial q) = 0, \quad (12б)$$

первое из которых при  $\hbar \rightarrow 0$  превращается в уравнение Гамильтона — Якоби для действия  $S(q, t)$  классической частицы (предельный переход к классической механике), а второе является уравнением непрерывности для плотности вероятности распределения квантовой частицы  $R^2 = |\psi(t, q)|^2$  [187]. В рамках «бомовской» механики (12a) рассматривается как уравнение движения квантовой частицы под совокупным воздействием детерминистского потенциала  $V$  и «направляющей» волновой функции (*pilot wave*)  $R(q, t)$ , заданной уравнением Шредингера (12б). Уравнение (12a), обобщаемое на пространство координат  $\{q_j\}$  любой размерности, в квадратных скобках содержит потенциал с детерминистской частью  $V(q, t)$  и «квантовыми» возмущениями, превращающими непрерывную траекторию частицы во фрактальное множество точек.

Формализм бомовской механики позволяет описать все известные квантовомеханические явления [185], допуская при этом наличие точного положения в пространстве и точного импульса у квантовой частицы в любой момент  $t$  (насколько эти термины можно перенести с гладких траекторий на фрактальные) [186]. Последнее обстоятельство ликвидирует многочисленные парадоксы, связанные с «буквальным» представлением дискретных частиц волнами вероятности, и подтверждается данными по рассеянию молекулярных пучков, полученными в 1990-е гг. в ходе экспериментальной проверки основных постулатов квантовой механики [188, 189]. Тем не менее, квантовомеханическая концепция Бома с середины XX в. остается предметом интенсивных дискуссий и до сих пор не является общепризнанной. В работах Хренникова и соавт. (см. [178] и цитированную литературу) бомовскими траекториями предлагается описывать эволюцию финансовых рынков под воздействием детерминистского «потенциала»  $V(Q, t)$  (где набору координат  $Q$  отвечают объективно действующие ценовые факторы) и направляющей волновой функции, которая отражает психологию участников рынка. В статье [181] выделяются «жесткий» и «мягкий» компоненты совокупного рыночного потенциала: «жесткий» детерминированный рынок реализуется при ограни-

ченных ресурсах, тогда как «мягкими» являются спекулятивные рынки, динамика которых сильно зависит от психологии игроков. Эмпирические аналогии экономических и иных социальных процессов с квантовыми явлениями обсуждаются в работах последних лет [182, 183, 190].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работы, рассмотренные в настоящей (второй) части обзора, выполнены в наиболее формализованных направлениях физики социальных систем; они хорошо иллюстрируют как достижения, так и ограничения всей области в целом. Физические исследования сетей «реального мира» по своей идеологии имеют много общего с рассмотренными в первой части исследованиями транспортных и пешеходных потоков [1]. В обеих областях точные решения, воспроизводящие на качественном уровне некоторые наблюдаемые черты социальных систем, удастся получить лишь для весьма идеализированных моделей, которые довольно далеки как от реалистического описания системы, так и от исходных физических принципов. В частности, эпидемиологическая модель SIR, соответствующая задаче о перколяции связей в графе, имеет точное решение, тогда как формально более простая модель SIS точного решения не имеет. В «приближении среднего поля», позволяющего проинтегрировать дифференциальные уравнения распространения инфекции в сети, для всех ребер постулируется единая вероятность соединения неинфицированного узла с инфицированным [18], так что суммарная вероятность заражения узлов достаточно высокого порядка оказывается больше 1. Нередко реальные сети (в лучшем случае относящиеся к мезоскопическим системам) анализируют на основе асимптотических соотношений, справедливых лишь для бесконечного числа узлов. Для численного же расчета процессов в конечных сетях социальных взаимодействий необходимо сначала установить их структуру — обычно априори неизвестную — и тесно связанный с ней механизм процесса (чаще всего заимствуемый из уже опубликованных работ). Все это привносит в область, официально называемую статистической физикой сетей [5—21], существенные черты имитационного моделирования.

Эконофизические исследования существенно отличаются от прочих направлений «физики общества» отсутствием единой теоретической модели, разнородностью решаемых задач и, в целом, применением более сложного и даже экзотического формального аппарата. Эти качества, вероят-



но, обусловлены особым местом количественных методов экономики в жизни людей. Среди всех социальных дисциплин экономические науки обладают наиболее развитой собственной теорией, определенная часть которой в разное время была заимствована из теоретической физики. Из полемики профессиональных экономистов с физиками [82, 94, 108, 165] в любом случае можно видеть, что нынешняя эконофизика не охватывает всех квазифизических представлений экономики и представляет лишь скромную долю ее моделей. Достижения эконофизики в прогнозировании и управлении также пока несравнимы с эффективностью традиционных экономических методов. Поэтому, за пределами динамики биржи, интерес физиков здесь остается в основном академическим. Тем не менее, физические идеи и подходы уже заметно изменили экономическую теорию.

Как и в других приложениях физики к социуму, большой положительный вклад в экономическую науку вносят объективные методы регистрации и обработки эмпирических данных. Помимо выявления новых закономерностей («биржевые» флуктуации [112], фрактальные графики [102], распределения доходов населения [154, 155]), такие работы повышают уровень требований к количественным измерениям, способствуя переходу от «стилизованного» описания к проверяемым моделям. (Заслуга эконофизики, в частности, состоит в опровержении гауссова характера рыночных случайных процессов, постулированного в ряде экономических теорий [81, 90, 91]). Эмпирически установленное подобие явлений в разных социальных системах («фазовый переход» [103, 121], «закон Ципфа» [56, 109] и др.) индуцирует их единое описание, снижая амбивалентность «классических» конструкций. Все это делает экономическую теорию более объективной, тем самым приближая ее к физике.

Встречное внедрение физического формализма наблюдается прежде всего в прикладных экономических задачах. Кроме частных примеров «экономической энтропии» и теории финансов (см. выше), следует упомянуть общие динамические модели экономики, где методы теоретической физики применяются очень широко [84, 88] — особенно в задачах прогнозирования и планирования [191]. В отдаленной перспективе можно ожидать соединения математических моделей экономики в единую физически обоснованную теорию, в которой усеченное распределение Леви, кластеризация волатильности и другие проблемы нынешней эконофизики вряд ли займут центральное место. В этом смысле большой интерес представ-

ляет «квантовая» феноменология явлений, обусловленных человеческим сознанием. Поскольку квантовоподобными моделями, помимо спекулятивного рынка, уже описывают динамику общественного мнения и некоторые задачи лингвистики (эти вопросы будут рассмотрены в третьей части), данное направление развития физики общества представляется весьма многообещающим.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Словохотов Ю.Л.* Физика и социофизика. Ч. 1. Физические основы социальных явлений. Влияние солнечной активности на процессы в обществе. Движение в системе «живых частиц» // Проблемы управления. — 2012. — № 1. — С. 2—20.
2. *Гусев А.И.* Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2009.
3. *Moussaïd M., et al.* The walking behaviour of pedestrian social groups and its impact on crowd dynamics // PLoS ONE — 2010. — Vol. 5, N 4. e10047.
4. *Ren W., Beard R.W.* Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: theory and applications. — London: Springer, 2008. — 319 p.
5. *The structure and dynamics of networks* / M. Newman, Barabasi, D.J. Watts (Eds.). — Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. — 582 p.
6. *Pastor-Satorras R., Vespignani A.* Evolution and structure of the Internet: a statistical physics approach. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. — 267 p.
7. *Wu C.W.* Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems. — Singapore: World Scientific, 2007. — 162 p.
8. *Cooperative control of distributed multi-agent systems* / J.S. Shamma (Ed.). — London: Wiley, 2007. — 452 p.
9. *Barrat A., Barthelemy M., Vespignani A.* Dynamical processes on complex networks. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. — 368 p.
10. *Jackson M.O.* Social and economic networks. — Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 2008. — 520 p.
11. *Newman M.* Networks: an introduction. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2010. — 720 p.
12. *Dorogovtsev S.N.* Lectures on complex networks. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2010. — 144 p.
13. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph theoretic methods in multi-agent networks. — Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 2010. — 424 p.
14. *Ren W., Cao Y.* Distributed Coordination of Multi-Agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues. — London: Springer, 2011. — 307 p.
15. *Estrada E.* The structure of complex networks: theory and applications. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2011. — 448 p.
16. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2010. — 228 с.
17. *Albert R., Barabasi A.-L.* Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. — 2002. — Vol. 74, N 1. — P. 47—97.
18. *Newman M.E.J.* The structure and function of complex networks // SIAM Review. — 2003. — Vol. 45, N 2. — P. 167—256.

19. *Dorogovtsev S.N., Goltsev A.V., Mendes J.F.F.* Critical phenomena in complex networks // *Rev. Mod. Phys.* — 2008. — Vol. 80, N 4. — P. 1275–1335.
20. *Lü L., Zhou T.* Link Prediction in Complex Networks: A Survey // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2011. — Vol. 390. — P. 1150–1170.
21. *Евин И.А.* Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 121–141.
22. *Watts D.J., Strogatz, S.H.* Collective dynamics of ‘small-world’ networks // *Nature.* — 1998. — Vol. 393. — P. 440–442.
23. *Харари Ф.* Теория графов. — 3-е изд. — М.: КомКнига, 2006. — 296 с.
24. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. — М.: Наука, 1986. — 497 с.
25. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. — М.: Физматлит, 2007. — 228 с.
26. *Кулинич А.А.* Компьютерные системы анализа ситуаций и поддержки принятия решений на основе когнитивных карт: подходы и методы // *Проблемы управления.* — 2011. — № 4. — С. 31–45.
27. *Абрамова Н.А., Коврига С.В.* Некоторые критерии достоверности моделей на основе когнитивных карт // Там же. — 2008. — № 6. — С. 23–33.
28. *Amaral L.A.N., Scala A., Barthélemy M., Stanley H.E.* Classes of behavior of small-world networks // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 2000. — Vol. 97, N 21. — P. 11149–11152.
29. *Стенли Г.* Фазовые переходы и критические явления. — М.: Мир, 1973. — 425 с.
30. *Dorogovtsev S.N., Krapivsky P.L., Mendes J.F.F.* Transition from small to large world in growing networks // *Europhys. Letters.* — 2008. — Vol. 81, 30004.
31. *Задорожный В.Н.* Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания // *Проблемы управления.* — 2010. — № 6. — С. 2–11.
32. *Boguna M., Pastor-Satorras R., Vespignani A.* Epidemic spreading in complex networks with degree correlations // *Lect. Notes Phys.* — 2003, 650, 425, arXiv:cond-mat/0301149v1 (2003).
33. *Castellano C., Fortunato S., Loreto V.* Statistical physics of social dynamics // *Rev. Mod. Phys.* — 2009. — Vol. 81, N 2. — P. 591–646.
34. *Albert R., Jeong H., Barabasi A.-L.* Error and attack tolerance of complex networks // *Nature.* — 2000. — Vol. 406. — P. 378–381.
35. *Draief M., Ganesh A., Massoulié L.* Thresholds for virus spread on networks // *Ann. Appl. Probability.* — 2008. — Vol. 18, N 2. — P. 359–378.
36. *Hu H., Myers S., Colizza V., Vespignani A.* WiFi networks and malware epidemiology // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 2009. — Vol. 106, N 5. — P. 1318–1323.
37. *Shiraki Y., Kabashima Y.* Cavity analysis on the robustness of random networks against targeted attacks: Influences of degree-degree correlations // *Phys. Rev. E.* — 2010. — Vol. 82, N 3. 036101; arXiv:1002.4938v2 (2010).
38. *Newman M.E.J.* Detecting community structure in networks // *Eur. Phys. J. B.* — 2004. — Vol. 38, N 2. — P. 321–330.
39. *Palla G., Barabasi A.-L., Vicsek T.* Quantifying social group evolution // *Nature.* — 2007. — Vol. 446. — P. 664–667.
40. *Cajueiro D.O.* Optimal navigation in complex networks // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 79, N 4. 046103.
41. *Leung I.X.Y., Hui P., Lio P., Crowcroft J.* Towards real-time community detection in large networks // *Ibid.* — 2009. — Vol. 79, N 6. 066107.
42. *Bullock S., Geard N.* Spatial embedding as an enabling constraint: Introduction to a special issue of complexity on the topic of «Spatial Organization» // *Complexity.* — 2010. — Vol. 16, N 2. — P. 8–10.
43. *Evans A.J.* Complex spatial networks in application // *Ibid.* — 2010, — Vol. 16, N 2. — P. 11–19.
44. *De Martino D., Dall’Asta L., Bianconi G., Marsili M.* Congestion phenomena on complex networks // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 79, N 1. 015101(R).
45. *Candia J., et al.* Uncovering individual and collective human dynamics from mobile phone records // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2008. — Vol. 41. 224015.
46. *Onnela J.-P., et al.* Structure and tie strengths in mobile communication networks // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 2007. — Vol. 104, N 18. — P. 7332–7336.
47. *Buzna L., et al.* Robustness of trans-European gas networks // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 80, N 1. 016106.
48. *Fagiolo G., Reyes J., Schiavo S.* World-trade web: topological properties, dynamics, and evolution // *Ibid.* — 2009. — Vol. 79, N 3. 036115.
49. *Vitali S., Glattfelder J.B., Battiston S.* The network of global corporate control // *PLoS ONE* 6(10): e25995. URL: <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0025995> (дата обращения 30.01.2012).
50. *Vaz Martins T., Toral R., Santos M.A.* Divide and conquer: resonance induced by competitive interactions // *Eur. Phys. J. B.* — 2009. — Vol. 67, N 3. — P. 329–336.
51. *Moreno Y., Pacheco A.F.* Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks // *Europhys. Lett.* — 2004. — Vol. 68, N 4. — P. 603–609.
52. *Gomez-Gardenes J., Moreno Y., Arenas A.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Phys. Rev. E.* — 2007. — Vol. 75, N 6. 066106.
53. *Chen M., Shang Y., Zou Y., Kurths J.* Synchronization in the Kuramoto model: a dynamical gradient network approach // *Ibid.* — 2008. — Vol. 77, N 2. 027101.
54. *Kalloniatis A.* From incoherence to synchronicity in the network Kuramoto model // *Ibid.* — 2010. — Vol. 82, N 6. 066202.
55. *Néda Z., et al.* Physics of the rhythmic applause // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 61, N 6. — P. 6987–6992.
56. *Newman M.E.J.* Power laws, Pareto distributions and Zipf’s law // *Contemp. Phys.* — 2005, — Vol. 46, N 5. — P. 323–351.
57. *Watts D.J.* A simple model of of global cascades on random networks // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 2002. — Vol. 99, N 9. — P. 5766–5771.
58. *Holme P., Kim B.J.* Vertex overload breakdown in evolving networks // *Phys. Rev. E.* — 2002. — Vol. 65, N 6. 066109.
59. *Motter A.E., Lai, Y.-C.* Cascade-based attacks on complex networks // *Ibid.* — 2002. — Vol. 66, N 6. 065102.
60. *Dobson I., Carreras B., Newman D.* Complex systems analysis of series of blackouts: cascading failure, critical points, and self-organization // *Chaos.* — 2007. — Vol. 17, N 2. 026103.
61. *Buldyrev S., et al.* Catastrophic cascade of failures in interdependent networks // *Nature.* — 2010. — Vol. 464. — P. 1025–1028.
62. *Palla G., Derenyi I., Farkas I., Vicsek T.* Statistical mechanics of topological phase transitions in networks // *Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 69, N 4. 046117.
63. *Метод молекулярной динамики в физической химии* / Ред. Ю.К. Товбин. — М.: Наука, 1996. — 334 с.
64. *Vicsek T.* Phase transitions and overlapping modules in complex networks // *Physica A.* — 2007. — Vol. 378, N 1 — P. 20–32.
65. *Kami N., Ikeda H.* Topological transition in dynamic complex networks // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 79, N 5. 056112.



66. *Bреер В.В.* Стохастические модели социальных сетей // Управление большими системами. — 2009. — № 27. — С. 169–202.
67. *Kaluza P., Strege C., Meyer-Ortmanns H.* Noise as control parameter in networks of excitable media: role of the network topology // *Phys. Rev. E.* — 2010. — Vol. 82, N 3. 036104.
68. *Vaz Martins T., Livina V.N., Majtey A.P., Toral R.* Resonance induced by repulsive interactions in a model of globally-coupled bistable systems, arXiv:1001.2993v1 [cond-mat.stat-mech] 18 Jan. 2010.
69. *Odor G., Juhasz R., Castellano C., Munoz M.A.* Griffiths phases in the contact process on complex networks // *AIP Conf. Proc.* — 2011. — Vol. 1332. — N 1. — P. 172–178 arXiv: 1010.4413v1 [cond-mat.stat-mech] 21 Oct. 2010.
70. *Rogers E.M.* Diffusion of innovations. — 5<sup>th</sup> Ed. — N.-Y.: Free Press, 2003. — 512 p.
71. *Meade N., Islam T.* Modelling and forecasting the diffusion of innovation — A 25-year review // *Int. J. of Forecasting.* — 2006. — Vol. 22, N 3. — P. 519–545.
72. *Valente T.W.* Social network thresholds in the diffusion of innovations // *Social Networks.* — 1996. — Vol. 18, N 1. — P. 60–89.
73. *Raynaud D.* Why do diffusion data not fit the logistic model? A note on network discreteness, heterogeneity and anisotropy // From sociology to computing in social networks: theory, foundations and applications. Series: Lecture notes in social networks / N. Memon, R. Alhajj (Eds.). — 2010. — Vol. 1. — P. 81–96.
74. *Van Slyke C., Ilie V., Lou H., Stafford T.* Perceived critical mass and the adoption of a communication technology // *Europ. J. Inform. Syst.* — 2007. — Vol. 16, N 3. — P. 270–283.
75. *Montanari A., Saberi A.* The spread of innovations in social networks // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 2010. — Vol. 107, N 47. — P. 20196–20201.
76. *Wilson R.* Diffusion theory applied to the current Mandaean diaspora. — URL: <http://rickwilsondmd.typepad.com/mandaeancrisis> (дата обращения 7.02.2012).
77. *Shirkey C.* Here comes everybody. The power of organizing without organization. — Penguin, 2008. — 336 p.
78. *Onnela J.-P., Reed-Tsochas F.* Spontaneous emergence of social influence in online systems // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 2010. — Vol. 107, N 43. — P. 18375–18380.
79. *Centola D.* The spread of behavior in an online social network experiment // *Science.* — 2010. — Vol. 329. — P. 1194–1197.
80. *Simoni M., Tatorynowicz A., Vagnani G.* The complex dynamics of innovation diffusion and social structure: a simulation study // *Proc. 1<sup>st</sup> Int. Conf. on Econ. Sciences with Heterogeneous Interacting Agents (WEHIA 2006).* — URL: [http://www2.dse.unibo.it/wehia/paral\\_session.htm](http://www2.dse.unibo.it/wehia/paral_session.htm).
81. *Bachelier L.* Theorie de la speculation // *Annales scientifiques de l'E.N.S. 3e serie.* — 1900. — Vol. 17. — P. 21–86.
82. *Farmer J.D., Shubik M., Smith E.* Is economics the next physical science? // *Phys. Today.* — 2005. — Vol. 58, N 9. — P. 37–42; arXiv: physics/0506086 v1 9 June 2005.
83. *Гребенников П.И., Леусский А.И., Тарасевич Л.С.* Экономика: учебник для вузов. — М.: Инфра-М, 2000. — 269 с.
84. *Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В.* О проблемах физической экономики // *Успехи физ. наук.* — 2002. — Т. 172, № 9. — С. 1045–1066.
85. *Вайдлих В.* Социодинамика: системный подход к математическому моделированию в социальных науках: пер. с англ. — М: URSS, 2005. — 480 с.
86. *Hanneman R.* Computer-assisting theory building: modelling dynamic social systems. — Newsbury Park: Sage Publications, 1988. — 340 p.
87. *Kollman K., Miller J.H., Page S.E.* (Eds.), Computational models in political economy. — Cambridge: MIT Press, 2003. — 293 p.
88. *Sargent T.J.* Dynamic macroeconomic theory. — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1987. — 369 p.
89. *Edwards R.D., Magee J., Bassett W.H.C.* Technical analysis of stock trend. — 9<sup>th</sup> Ed. — N.-Y.: CRC Press, 2007. — 752 p.
90. *Atkinson A.B., Bourguignon F.* (Eds.) Handbook of income distribution. — Amsterdam: Elsevier, 2000. — Vol. 1. — 958 p.
91. *Tesfatsion L., Judd K.L.* (Eds.) Handbook of computational economics. — Amsterdam: North-Holland, 2006. — 904 p.
92. *Mantegna R.N., Stanley H.E.* Scaling behavior in the dynamics of an economic index // *Nature.* — 1995. — Vol. 376. — P. 46–49.
93. *Stanley H.E., et al.* Similarities and differences between physics and economics // *Physica A.* — 2001. — Vol. 299, N 1. — P. 1–15.
94. *Ball P.* Econophysics: culture crash // *Nature* — 2006. — Vol. 441, — P. 686–688.
95. *Орлов А.И.* Эконометрика. Учебник. — М.: Экзамен, 2002. — 576 с.
96. *Myerson R.B.* Game theory: analysis of conflict. — Harvard: Harvard Univ. Press. — 1997. — 600 p.
97. *Мантенья Р.Н., Стенли Г.Ю.* Введение в эконофизику. Корреляции и сложность в финансах: пер. с англ. — М.: URSS, 2009. — 192 с.
98. *Романовский М.Ю., Романовский Ю.М.* Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. — М.: ИКИ, 2007. — 280 с.
99. *Видов П.В., Романовский М.Ю.* Аналитические представления негауссовых законов случайных блужданий // *Тр. ИОФАН.* — 2009. — Т. 65. — С. 3–19.
100. *Романовский М.Ю.* Функциональные блуждания Леви // Там же. — С. 20–28.
101. *Галкин С.А.* и др. Экспоненциальные распределения индивидуальных доходов и расходов граждан: наблюдения и модели // Там же. — С. 29–49.
102. *Дубовиков М.М., Старченко Н.В.* Эконофизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов // *Успехи физ. наук.* — 2011. — Т. 181. — № 7. — С. 779–786.
103. *Сорнетте Д.* Как предсказывать крахи финансовых рынков — М.: И-Трейд, 2003. — 198 с.
104. *Маслов В.П.* Квантовая экономика. — 2-е изд. — М.: Наука, 2006. — 92 с.
105. *Naldi G., Pareschi L., Toskani G.* (Eds.) Mathematical modeling of collective behavior in socio-economic and life sciences. — Berlin: Springer, 2010. — 438 p.
106. *Chakrabarti B.K., Chakraborti A., Chatterie A.* (Eds.) Econophysics and sociophysics: trends and perspectives. — Berlin: Wiley-VCH, 2006. — 622 p.
107. *Basu B., Shkravarthy S.R., Chakrabarti B.K., Gangopadhaya K.* (Eds.) Econophysics and economics of games, social choices and quantitative techniques. — Berlin: Springer, 2010. — 394 p.
108. *Lillo F.* Econophysics and the challenge of efficiency // *Complexity.* — 2008. — Vol. 14, N 3. — P. 39–54.
109. *Gabaux X.* Power laws in economics and finance // *Ann. Rev. Econ.* — 2009. — Vol. 1. — P. 225–293.
110. *Chakraborti A., Muni Toke I.M., Patriarca M., Abergel F.* Econophysics review: I. Empirical facts *Quantitative Finance.* — 2011. — Vol. 11, N 7. — P. 991–1012; II. Agent-based models // *Ibid.* — P. 1013–1041; arXiv:0909.1974v1.
111. *Cont R.* Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues // *Quant. Finance.* — 2001. — Vol. 1, N 2. — P. 223–236.

112. *Stanley H.E., Plerou V.* Scaling and universality in economics: empirical results and theoretical interpretation // *Ibid.* — 2001. — Vol. 1, N 6. — P. 563–567.
113. *Wang F., Shieh S.-J., Havlin S., Stanley H. E.* Statistical analysis of the overnight and daytime return // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 79, N 5. 056109.
114. *Gabaix X., Gopikrishnan P., Plerou V., Stanley E.* A unified econophysics explanation for the power-law exponents of stock market activity // *Physica A.* — 2007. — Vol. 382 — N 1. — P. 81–88.
115. *Mahnke R., Kaupuzs J., Lubashevsky I.* Physics of stochastic processes. How randomness acts in time. — Berlin: Wiley-VCH, 2008. — 430 p.
116. *Mandelbrot B.* The fractal geometry of Nature. — San Francisco: Freeman, 1982. — 460 p.
117. *URL:* <http://stockcharts.com/charts/historical/djia1900.html> (дата обращения 7.02.2012).
118. *Dubovikov M.M., Starchenko N.S., Dubovikov M.S.* Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series // *Physica A.* — 2004. — Vol. 339, N 3–4. — P. 591–608.
119. *Sornette D., Johansen A.* A hierarchical model of financial crashes // *Physica A.* — 1998. — Vol. 261, N 3–4. — P. 581–598.
120. *Ormerod P., Mounfield C.* Power law distribution of the duration and magnitude of recession of capitalist economies: breakdown of scaling // *Ibid.* — 2001. — Vol. 293, N 3–4. — P. 573–582.
121. *Johanssen A., Sornette D.* Finite-time singularity in the dynamics of the world population, economic and financial indexes // *Ibid.* — 2001. — Vol. 294. — N 3–4. — P. 465–502.
122. *Aleksiejuk A., Holyst J.A.* A simple model of bank bankruptcies // *Ibid.* — 2001. — Vol. 299, N 1–2. — P. 198–204.
123. *Kaizoji T.* A model of international financial crises // *Ibid.* — 2001 — Vol. 299. — N 1–2. — P. 279–293.
124. *Von Foerster H., Mora P., Armiot L.* Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026 // *Science.* — 1960. — Vol. 132. — P. 1291–1295.
125. *Kremer M.* Population growth and technological change: one million B.C. to 1990 // *Quart. J. Econ.* — 1993. — Vol. 108, N 3. — P. 682–716.
126. *Капица С.П.* Общая теория роста человечества. — М.: Наука, 1999. — 117 с.
127. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 5: Статистическая физика. — 2-е изд. — М.: Наука, 1964. — С. 501–537.
128. *Zhou W.-X., Sornette D.* Testing the stability of the 2000 US stock market «antibubble» // *Physica A.* — 2005. — Vol. 348. — P. 429–452, arXiv:cond-mat/0310092v2.
129. *Zhou W.-X., Sornette D.* Fundamental factors versus herding in the 2000–2005 US stock market and prediction // *Ibid.* — 2006. — Vol. 360. — N 2. — P. 459–482, arXiv:physics/0505079v1.
130. *Подлазов А.В.* Природа лог-периодических колебаний, возникающих при приближении к катастрофе // Прогноз и моделирование кризисов и мировой динамики. — М., 2010. — С. 142–160.
131. *Григорьев О.В., Хазин М.Л.* Сценарий финансового кризиса // Метод. семинар ФИАИ. — Вып. 2, ч. 2. — URL: <http://www.netda.ru/fian/fian2b.htm#05> (дата обращения 7.07.2011).
132. *Lillo F., Mantegna R.N.* Dynamics of a financial market index after a crash // *Physica A.* — 2004 — Vol. 338, N 1–2. — P. 125–134.
133. *Sornette D., Woodard R., Zhou W.-X.* The 2006–2008 oil bubble: evidence of speculations and predictions // *Ibid.* — 2009. — Vol. 388, N 8. — P. 1571–1576.
134. *Takayashi M., Watanabe T., Takayashi H.* (Eds.) Econophysics approaches to large-scale business data and financial crisis: proceedings of Tokyo Tech-Hitotsubashi interdisciplinary conference +APFA7. — Berlin: Springer, 2010. — 342 p.
135. *Словохотов Ю.Л.* Аналогии фазовых переходов в экономике и демографии // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 202–218.
136. *Sandoval L. Jr., de Paula Franca I.* Correlation of financial market in times of crisis, arXiv:1102.1339v.
137. *Tsirel S.V., Akaev A., Fomin A., Korotayev A.V.* Log-periodic oscillations analysis and possible burst of the «Gold Bubble» in April — June 2011, Structure and Dynamics // *eJournal of Antropological and Related Science.* — 2010. — Т. 4, N 3. — P. 1–11 [Полная версия: URL: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1012/1012.4118.pdf> (дата обращения 6.02.2012)].
138. *Auerbach A. J.* (Ed.) Mergers and acquisitions. — Chicago: Univ. Chicago Press, 1988. — 108 p.
139. *Penrose E.* The theory of the growth of the firm. — 3<sup>rd</sup> ed. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. — 296 p.
140. *URL:* <http://www.kitco.com/charts/historicalgold.html> (дата обращения 6.02.2012).
141. *Smith E., Foley D.K.* Classical thermodynamics and economic general equilibrium theory // *J. Econ. Dynamics & Control.* — 2008. — Vol. 32, N 1. — P. 7–65.
142. *De Benedictis L., Taglioni D.* The gravity model in international trade // The trade impact of European Union preferential policies / De L. Benedictis, L. Salvatici (eds.). — Berlin: Springer, 2011. — 250 p.
143. *Moro R., et al.* Market impact and trading profile of hidden orders in stock markets // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 80, N 6. 066102.
144. *Габидулин Э. М., Пилипчук Н. И.* Лекции по теории информации. — М.: МФТИ, 2007. — С. 16. — 214 с.
145. *Darbellay G.A., Wuertz D.* The entropy as a tool for analyzing statistical dependences in financial time series // *Physica A.* — 2000. — Vol. 287, N 3–4. — P. 429–439.
146. *Dionisio A., Menezes R., Mendes D.A.* Entropy and uncertainty analysis in financial markets, arXiv: 0709.0668v1 [q-fin.ST] 5 Sep 2007.
147. *Kenett D.Y., et al.* Index cohesive force analysis reveals that the US market became prone to systemic collapses since 2002 // *PLoS ONE.* — 2011. — Vol. 6, N 4. e19378.
148. *Chen J.* The physical foundation of economics: an analytical thermodynamic theory. — Singapore: World Scientific Publishing, 2005. — 132 p.
149. *Chen J.* The entropy theory of mind and behavioral finance // Social Science Research Network, 3.01.2011. — URL: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm> (дата обращения 6.02.2012).
150. *Чернавский Д.С.* Синергетика и информация: динамическая теория информации. — 3-е изд. — М.: ЛКИ, 2009. — 304 с.
151. *Volobuev D.* «Toy» dynamo to describe the long-term solar activity cycles // *Solar Physics.* — 2006. — Vol. 238. — P. 421–430.
152. *Stauffer D., Radomski J.P.* Scaling in the Donangelo — Snerpen model for evolution of money // *Physica A.* — 2001. — Vol. 291, N 1–4. — P. 583–586.
153. *Shubik M., Smith E.* Structure, clearinghouses and symmetry // *Econ. Theory.* — 2007. — Vol. 30, N 3. — P. 587–597.
154. *Dragulescu A., Yakovenko V.M.* Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States // *Physica A.* — 2001. — Vol. 299, N 1–2. — P. 213–221.
155. *Banerjee A., Yakovenko V.M., Di Matteo T.* A study of the personal income distribution in Australia, arXiv:physics/0601176v1 [physics.soc-ph] 22 Jan. 2006.



156. *Banerjee A., Yakovenko V.M.* Universal patterns of inequality // *New J. Phys.* — 2010. — Vol. 12. 075032.
157. *Scafetta N., Picozzi S., West B.J.* An out-of-equilibrium model of the distribution of wealth // *Quant. Finance.* — 2004. — Vol. 4, N 3. — P. 353–364.
158. *Chatterjee A., Sen P.* Agent dynamics in kinetic models of wealth exchange // *Phys. Rev. E.* — 2010. — Vol. 82, N 5. 056117.
159. *Toscani G., Brugna C.* Wealth redistribution in Boltzmann-like models of conservative economies // *Econophysics and economics of games, social choices and quantitative techniques* / B. Basu, S.R. Shakravarthy, B.K. Chakrabarti, K. Gangopadhyaya (eds.). — Berlin: Springer, 2010. — Part I. — P. 71–82.
160. *Nirei M.* Pareto distributions in economic growth models / Hitotsubashi University IIR Working Paper 09-05. — URL: <http://hdl.handle.net/10086/17503>.
161. *Kleiber C.* The Lorenz curve in economics and econometrics / Working paper 09/07, Faculty of Business and Economics, University of Basel, 2007. — URL: [http://wwz.unibas.ch/uploads/tx\\_x4epublication/09\\_07.pdf](http://wwz.unibas.ch/uploads/tx_x4epublication/09_07.pdf) (дата обращения 20.02.2012).
162. *Gibrat R.* *Les Inegalites Economique* / Librairie du Recueil Sirey. — Paris, 1931.
163. *Davies J.B., Shorrocks A.F.* The distribution of wealth // *Handbook of Income Distribution* / A.B. Atkinson, F. Bourguignon (eds.). — Amsterdam: Elsevier, 1999. — 938 p.
164. *Sornette D.* Multiplicative processes and power laws // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Vol. 57. — P. 4811–4813.
165. *Gallegati M., Keen S., Lux T., Ormerod P.* Worrying trends in econophysics // *Physica A.* — 2006. — Vol. 370, N 1. — P. 1–6.
166. *Coelho R., Neda Z., Ramasco J.J., Santos M.-A.* A family-network model for wealth distribution in societies // *Ibid.* — 2005. — Vol. 353. — P. 515–528.
167. *Ikeda Y., et al.* Response of firm agent network to exogenous shock // *Ibid.* — 2007. — Vol. 382. — N 1. — P. 138–148.
168. *Eom C., Oh G., Kim S.* Deterministic factors of stock networks based on cross-correlation in financial market // *Ibid.* — 2007. — Vol. 383. — N 1. — P. 139–146.
169. *Tabak B.M., Serra T.R., Cajueiro D.O.* Topological properties of stock market networks: The case of Brazil // *Ibid.* — 2010. — Vol. 389, N 16. — P. 3240–3249.
170. *Emmert-Streib F., Dehmer M.* Identifying critical financial networks of the DJIA: toward a network-based index // *Complexity.* — 2010. — Vol. 16, N 1. — P. 24–33.
171. *Chatterjee A.* On kinetic asset exchange models and beyond: microeconomic formulation, trade network, and all that // *Mathematical modeling of collective behavior in socio-economic and life sciences* / G. Naldi, L. Pareschi, G. Toscani (eds.). — Berlin: Springer, 2010. — P. 31–50.
172. *Fronczak A., Fronczak P.* Statistical mechanics of the international trade network. arXiv:1104.2606v1 [q-fin.GN] 13 Apr 2011.
173. *Подлазов А.В.* Закон Ципфа и модели конкурентного роста // *Новое в синергетике. Нелинейность в современном естествознании. Синергетика: от прошлого к будущему* / Ред. Г.Г. Малинецкий. — М.: ЛИБРОКОМ, 2009. — С. 229–256.
174. *Адамчук А.Н., Есинов С.Е.* Коллективно флуктуирующие активы при наличии арбитражных возможностей и оценка платежных обязательств // *Успехи физ. наук.* — 1997. — Т. 167, № 12. — С. 1295–1306.
175. *Baaquie B.E.* Interest rates and coupon bonds in quantum finance. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. — 490 p.
176. *Baaquie B.E.* Quantum finance. Path integrals and Hamiltonians for options and interest rates. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. — 316 p.
177. *Kleinert H.* Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. — 3<sup>rd</sup> ed. — Singapur: World Scientific, 2003. — 1504 p.
178. *Khrennikov A.* Ubiquitous quantum structure. From psychology to finance. — Berlin: Springer, 2010. — 206 p.
179. *Schaden M.* Quantum finance // *Physica A.* — 2002. — Vol. 316, N 1–4. — P. 511–538.
180. *Piotrowski W., Sladkowski J.* Quantum auctions: facts and myths // *Ibid.* — 2008. — Vol. 387, N 15. — P. 3949–3953.
181. *Choustova O.* Quantum probability and financial market // *Inform. Sci.* — 2009. — Vol. 179, N 5. — P. 478–484.
182. *Bagarello F.* Stock markets and quantum dynamics: A second quantized description // *Physica A.* — 2007. — Vol. 383, N 2. — P. 283–302.
183. *Rosenblatt J., Martinás K.* Inequality indicators and distinguishability in economics // *Ibid.* — 2008. — Vol. 387, N 8–9. — P. 2047–2054.
184. *Вилази Г.* Гамильтонова динамика. — М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2006. — 431 с.
185. *Bohm D., Hiley B.* The undivided universe: an ontological interpretation of quantum mechanics — London: Routledge, 1993. — 397 p.
186. *Holland P.* The quantum theory of motion: an account of the de Broglie — Bohm causal interpretation of quantum mechanics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. — 598 p.
187. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — 4-е изд. — М.: Наука, 1989. — С. 73.
188. *Kurtsiefer C., Pfau T., Mlynek J.* Measurement of the Wigner function of an ensemble of helium atoms // *Nature.* — 1997. — Vol. 386. — P. 150–153.
189. *Albrecht A.* Quantum ripples in chaos // *Ibid.* — 2001. — Vol. 412. — P. 687–688.
190. *Schuster P.* Free will, information, quantum mechanics, and biology // *Complexity.* — 2009. — Vol. 15, No 1. — P. 8–10.
191. *Поспелов И.Г.* Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов. — М.: ВЦ РАН, 2003. — 206 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

**Словохотов Юрий Леонидович** — д-р хим. наук, зав. лабораторией, хим. факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ☎ (495) 939-54-34, ✉ slov@phys.chem.msu.ru; вед. науч. сотрудник, Институт элементоорганических соединений им. А.Н. Несмеянова РАН, г. Москва, ☎ (499) 135-93-04.